KLAUSUR

Vektoranalysis

20.2.2002

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 8 Punkte erreicht werden.

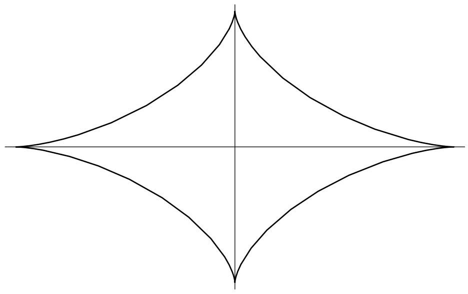
1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Wie kann man mit dem Greenschen Satz den Flächeninhalt der Menge

$$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}} \leq R^{\frac{2}{3}}\} ,$$

berechnen. Man parametrisiere die Randkurve (Asteroide) wie folgt:



Asteroide:
$\phi \mapsto (R(\cos(\phi))^3, R(\sin(\phi))^3)$,
$0 \leq \phi \leq 2\pi$.

(6P)

2. In der $x_2 - x_3$-Ebene werde eine glatte, doppelpunktfreie Kurve gegeben durch:

$$f(t) = (0, u(t), v(t)) , \quad t \in [a, b] , \quad f(a) = f(b) .$$

Ferner sei $u(t) > 0$, und die Kurve werde im entgegengesetzten Uhrzeigersinn durchlaufen.

Wenn die Kurve um die x_3-Achse im Raum rotiert, entsteht ein Rotationskörper mit der Oberfläche:

$$F(\phi, t) = (u(t)\, \cos(\phi), u(t)\, \sin(\phi), v(t)) , \quad \phi \in [0, 2\,\pi] , \quad t \in [a, b] .$$

Man berechne das Integral über den Rotationskörper K

$$\int\limits_K div\, V(x)\, dx , \quad \text{mit dem Vektorfeld} \quad V(x) = (x_1, x_2, 0) .$$

Man benutze dazu den Satz von Gauß und bestätige folgende Formel für das Volumen von K:

$$Vol(K) = \pi \int\limits_a^b (u(t))^2\, v'(t)\, dt .$$

(8P)

3. Gegeben seien die Tensoren erster Stufe (Vektoren):

$$\underline{a} = 3\,\underline{g}_1 + a^2\,\underline{g}_2 + a^3\,\underline{g}_3 \qquad \underline{b} = \underline{g}_1 + 4\,\underline{g}_2 + 6\,\underline{g}_3$$

Kann a^2, a^3 so bestimmt werden, dass

$$T = \underline{a} \otimes \underline{b} = t^{ij}\,\underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$$

ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe wird? Das heißt, dass gilt:

$$t^{ij} = t^{ji}\,.$$

(4P)

Lösungen

1.) Betrachtet man das Vektorfeld

$$V(x_1,x_2) = (0, x_1)\,,$$

so erhält man mit dem Greenschen Satz:

$$\int\limits_D dx = \int\limits_{\partial(D)} V\,ds\,.$$

Mit der Parameterdarstellung folgt hiervon:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D dx \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (0, R(\cos(\phi))^3)(-3R(\cos(\phi))^2\sin(\phi), 3R(\sin(\phi))^2\cos(\phi))^T\,d\phi \\
&= 3R^3 \int\limits_0^{2\pi} (\cos(\phi))^4(\sin(\phi))^2\,d\phi \\
&= \frac{3}{8}\,R^2\,\pi\,.
\end{aligned}$$

2.) Wir berechnen zunächst die Tangentenvektoren:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi,t) = \begin{pmatrix} -u(t)\,\sin(t) \\ u(t)\,\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\phi,t) = \begin{pmatrix} u'(t)\,\cos(t) \\ u'(t)\,\sin(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}\,.$$

Die Normale ergibt dann:

$$n(\phi,t) = \begin{pmatrix} u(t)\,v'(t)\,\cos(t) \\ u(t)\,v'(t)\,\sin(t) \\ -u(t)\,u'(t) \end{pmatrix} = u(t)\,\begin{pmatrix} v'(t)\,\cos(t) \\ v'(t)\,\sin(t) \\ -u'(t) \end{pmatrix}\,.$$

Da die gegebene Kurve positiv orientiert ist, stellt n eine aus dem Rotationskörper hinaus weisende Normale dar. Der Gaußsche Satz besagt dann:

$$\int\limits_K div\,V(x)\,dx = \int\limits_{\partial K} V(\phi,t)\cdot n(\phi,t)\,dA\,.$$

Die Divergenz des Vektorfelds ist konstant:

$$divV(x) = 2\,.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
2 \int_K dx &= \int_a^b \int_0^{2\pi} (u(t)\, \cos(\phi), u(t)\, \sin(\phi), 0) \cdot \\
&\qquad (u(t)\, v'(t)\, \cos(t), u(t)\, v'(t)\, \sin(t), -u(t)\, u'(t))\, d\phi\, dt \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} (u(t))^2\, v'(t)\, d\phi\, dt \\
&= 2\,\pi \int_a^b (u(t))^2\, v'(t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

3.) Wir bekommen das folgende Tensorprodukt:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = t^{ij}\, \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$$

mit der Matrix:

$$t^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ a^2 & 4\,a^2 & 6\,a^2 \\ a^3 & 4\,a^3 & 6\,a^3 \end{pmatrix}\,.$$

Der Tensor wird symmetrisch, wenn gilt:

$$a^2 = 12\,, \quad a^3 = 18\,, \quad 4\,a^3 = 6\,a^2\,.$$

Alle drei Bedingungen sind erfüllt, wenn man

$$a^2 = 12\,, \quad a^3 = 18\,,$$

wählt.