KLAUSUR

Vektoranalysis

14.9.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Fläche

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 3\,x_2^2 + x_3^2 = 1\,, \quad x_3 > 0\}\,.$$

   Man skizziere die Fläche und gebe eine Parameterdarstellung an. Wie lautet der Normalenvektor $\vec{n}$, der mit dem Vektor $(0, 0, 1)$ einen Winkel $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ einschließt? Man berechne das Integral

$$\int\limits_F (0, 0, x_3) \cdot \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\, dA\,.$$

   (6P)

2. Seien $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Skalarenfelder, $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der Laplace-Operator und $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit dem Rand ∂D und dem nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor $\vec{n}^0$.
   Man zeige:

$$\operatorname{div}(g\, \nabla h) = g\, \triangle(h) + \nabla g \cdot \nabla h$$

   und

$$\int\limits_D (g\, \triangle(h) + \nabla g \cdot \nabla h)\, dx = \int\limits_{\partial D} g\, \nabla h \cdot \vec{n}^0\, dA\,.$$

   (6P)

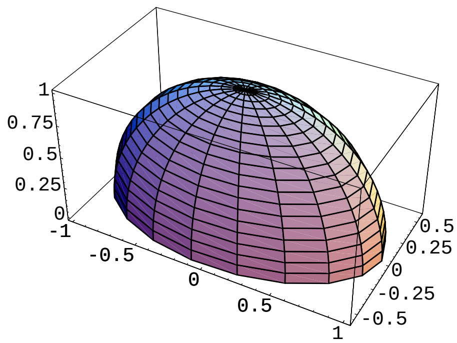
3. In Kugelkoordinaten $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$, $x^1 = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $x^2 = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$, $x^3 = r\cos(\vartheta)$, erhält man die kovariante Basis des Tangentialraums: $\underline{g}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\, \underline{e}_k$ und die Metrikkoeffizienten:

$$\left(g_{ij}\right) = \left(\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}\,.$$

   Der Gradient eines Skalarenfelds wird gegeben durch: $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \xi^i}\, \underline{g}^i$. Man gebe eine Darstellung des Gradienten $\nabla u = u_1^*\, \underline{g}_1^* + u_2^*\, \underline{g}_2^* + u_3^*\, \underline{g}_3^*$ mit kovarianten Einheitsvektoren $\underline{g}_i^*$ aus dem Tangentialraum.
   (6P)

Lösungen

1.) Teil eines Ellipsoids ($x^3 > 0$). Ellipse in $x^1 - x^2$ Ebene: $(x^1)^2 + 3(x^2)^2 = 1$, Kreis in $x^1 - x^3$ Ebene: $(x^1)^2 + (x^3)^2 = 1$, Ellipse in $x^2 - x^3$ Ebene: $3(x^2)^2 + (x^3)^2 \leq 1$.



Fläche F (Teil der Oberfläche eines Ellipsoids)

Parameterdarstellung: $f(\vartheta, \varphi) = (\sin(\vartheta)\ \cos(\varphi), \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin(\vartheta)\ \sin(\varphi), \cos(\vartheta))$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin^2(\vartheta)\ \cos(\varphi), \sin^2(\vartheta)\ \sin(\varphi), \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin(\vartheta)\ \cos(\vartheta))$.

$$\begin{aligned}\int_F (0,0,x_3) \cdot \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,0,\cos(\vartheta)) \cdot \vec{n}(\vartheta,\varphi) d\vartheta\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) d\vartheta\, d\varphi = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2.) $\frac{\partial}{\partial x^1}(g\, \frac{\partial}{\partial x^1} h) = g\, \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}(h) + \frac{\partial}{\partial x^1}(g)\, \frac{\partial}{\partial x^1}(h)$ analog nach x^2 und x^3 ableiten und summieren. Satz von Gauß:

$$\int_D (g \triangle(h) + \nabla g \cdot \nabla h)\, dx = \int_D \operatorname{div}(g\, \nabla h)\, dx = \int_{\partial D} g\, \nabla h \cdot \vec{n}^0\, dA\,.$$

3.) Kovariante Basis $\underline{g}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}$, kontravariante Basis $\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_i^j$. Mit den Metrikkoeffizienten:

$$\underline{g}^1 = \underline{g}_1\,, \quad \underline{g}^2 = \frac{1}{r^2}\, \underline{g}_2\,, \quad \underline{g}^3 = \frac{1}{r^2\ \sin^2 \Theta}\, \underline{g}_3$$

Gradient:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\underline{g}^1 + \frac{\partial u}{\partial \Theta}\,\underline{g}^2 + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\underline{g}^3 = \frac{\partial u}{\partial r}\,\underline{g}_1 + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial \Theta}\,\underline{g}_2 + \frac{1}{r^2\,\sin^2\Theta}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\underline{g}_3$$

Tangenteneinheitsvektoren (Metrikkoeffiziente): $|\underline{g}_i| = \sqrt{\underline{g}_i \cdot \underline{g}_i} = \sqrt{g_{ii}}$ (nicht summieren)

$$\underline{g}_1^* = \underline{g}_1\,, \quad \underline{g}_2^* = \frac{1}{\sqrt{r^2}}\,\underline{g}_2 = \frac{1}{r}\,\underline{g}_2\,, \quad \underline{g}_3^* = \frac{1}{\sqrt{r^2\,\sin^2(\vartheta)}}\,\underline{g}_3 = \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\underline{g}_3$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\underline{g}_1^* + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\,\underline{g}_2^* + \frac{1}{r\,\sin(\vartheta)}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\underline{g}_3^*$$