Gleichung auflösen – oder eben nicht

Peter Horn

Universität Kassel

24. Februar 2006

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Was machen wir heute?

Langweiliger kann's kaum klingen:

Gleichungen auflösen

- Also: Nullstellen von Polynomen suchen.
- Jeder kennt *pq*-Formel für quadratische Polynome.
- Wie ist das mit höheren Graden?
- Antwort: Schlimm bei 3, Ganz schlimm bei 4
- Danach einfach: Es geht nicht mehr.

Was machen wir heute?

Langweiliger kann's kaum klingen:

Gleichungen auflösen

- Also: Nullstellen von Polynomen suchen.
- Jeder kennt *pq*-Formel für quadratische Polynome.
- Wie ist das mit höheren Graden?
- Antwort: Schlimm bei 3, Ganz schlimm bei 4
- Danach einfach: Es geht nicht mehr.

Was machen wir heute?

Langweiliger kann's kaum klingen:

Gleichungen auflösen

- Also: Nullstellen von Polynomen suchen.
- Jeder kennt *pq*-Formel für quadratische Polynome.
- Wie ist das mit höheren Graden?
- Antwort: Schlimm bei 3, Ganz schlimm bei 4
- Danach einfach: Es geht nicht mehr.

Was machen wir heute?

Langweiliger kann's kaum klingen:

Gleichungen auflösen

- Also: Nullstellen von Polynomen suchen.
- Jeder kennt *pq*-Formel für quadratische Polynome.
- Wie ist das mit höheren Graden?
- Antwort: Schlimm bei 3, Ganz schlimm bei 4
- Danach einfach: Es geht nicht mehr.

Was machen wir heute?

Langweiliger kann's kaum klingen:

Gleichungen auflösen

- Also: Nullstellen von Polynomen suchen.
- Jeder kennt *pq*-Formel für quadratische Polynome.
- Wie ist das mit höheren Graden?
- Antwort: Schlimm bei 3, Ganz schlimm bei 4
- Danach einfach: Es geht nicht mehr.

Quadratische Gleichungen

- Bekannt aus der Schule ist die Fragestellung: Welche Lösungen hat eine gegebene quadratische Gleichung?
- Einfacher Fall, das kann jeder:

$$x^2 - 4 = 0$$

Lösungen:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

- Noch ein einfacher Fall, das kann hoffentlich auch noch jeder:

$$x^2 - 4x = 0$$

Lösungen:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Quadratische Gleichungen

- Bekannt aus der Schule ist die Fragestellung: Welche Lösungen hat eine gegebene quadratische Gleichung?
- Einfacher Fall, das kann jeder:

$$x^2 - 4 = 0$$

  Lösungen:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

- Noch ein einfacher Fall, das kann hoffentlich auch noch jeder:

$$x^2 - 4x = 0$$

  Lösungen:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Quadratische Gleichungen 2

Allgemeiner Fall:

$$x^2 + px + q = 0$$

Lösungsformel:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Zeigt man durch *quadratische Ergänzung*.)

Quadratische Gleichungen 2

Allgemeiner Fall:

$$x^2 + px + q = 0$$

Lösungsformel:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Zeigt man durch *quadratische Ergänzung*.)

Quadratische Gleichungen 3

Alternativer Ansatz: Probieren!

Gegeben:

$$x^2 + px + q$$

Idee: Sind x_1 und x_2 Lösungen, dann kann man die Gleichung "faktorisieren", das bedeutet man kann schreiben:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

und man sieht sofort durch Ausmultiplizieren, dass dann gelten muss:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Quadratische Gleichungen 3

Alternativer Ansatz: Probieren!

Gegeben:

$$x^2 + px + q$$

Idee: Sind x_1 und x_2 Lösungen, dann kann man die Gleichung “faktorisieren”, das bedeutet man kann schreiben:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

und man sieht sofort durch Ausmultiplizieren, dass dann gelten muss:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Satz von Vieta

Beispiel:

Gegeben:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Lösungen:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3,$$

denn

$$2 \cdot 3 = 6 \quad \text{und} \quad 2 + 3 = 5.$$

Also gilt die Zerlegung

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Dieses Prinzip nennt man den **Satz von Vieta.**

Satz von Vieta 2

Der Satz von Vieta gilt allgemeiner:

Gleichungen 3. Grades:

Gegeben:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Annahme: Nullstellen sind bekannt, dann:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 \\ &\quad +(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \cdot x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$x_1x_2x_3 = -r, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

Wir entdecken eine Regelmäßigkeit.

Elementarsymmetrische Funktionen

Gegeben:

$$n \text{ Variablen: } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Wir definieren die *erste elementarsymmetrische Funktion*:

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

und die *n–te elementarsymmetrische Funktion*:

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Im Fall $n = 2$:

$$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad s_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Das kennen wir schon: Sei $x^2 + px + q$ quadratische Gleichung mit Lösungen x_1, x_2.
Dann:

$$p = -s_1(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad q = s_2(x_1, x_2)$$

Elementarsymmetrische Funktionen

Gegeben:

$$n \text{ Variablen: } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Wir definieren die *erste elementarsymmetrische Funktion*:

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

und die *n–te elementarsymmetrische Funktion*:

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Im Fall $n = 2$:

$$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad s_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Das kennen wir schon: Sei $x^2 + px + q$ quadratische Gleichung mit Lösungen x_1, x_2.
Dann:

$$p = -s_1(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad q = s_2(x_1, x_2)$$

Elementarsymmetrische Funktionen 3

Wir verfolgen das Prinzip weiter im Fall $n = 3$:
Gegeben:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

kubische Gleichung mit Lösungen x_1, x_2, x_3
Wir erinnern uns:

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3) = -s_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$q = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$
$$r = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -s_3(x_1, x_2, x_3)$$

Was liegt nahe?

$$s_2(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

Elementarsymmetrische Funktionen 3

Wir verfolgen das Prinzip weiter im Fall $n = 3$:
Gegeben:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

kubische Gleichung mit Lösungen x_1, x_2, x_3
Wir erinnern uns:

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2 + x_3) = -s_1(x_1, x_2, x_3) \\ q &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ r &= -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -s_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Was liegt nahe?

$$s_2(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

Elementarsymmetrische Funktionen 4

Allgemeines Prinzip:

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n$$

$$s_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#S = k}} \prod_{i \in S} x_i$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \, x_2 \cdots x_n$$

Was sind das nun für tolle Funktionen?
Warum “elementarsymmetrisch”?

Elementarsymmetrische Funktionen 4

Allgemeines Prinzip:

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n$$
$$s_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#S = k}} \prod_{i \in S} x_i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \, x_2 \cdots x_n$$

Was sind das nun für tolle Funktionen?
Warum “elementarsymmetrisch”?

Elementarsymmetrische Funktionen 4

Allgemeines Prinzip:

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n$$
$$s_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#S = k}} \prod_{i \in S} x_i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \, x_2 \cdots x_n$$

Was sind das nun für tolle Funktionen?
Warum “elementarsymmetrisch”?

Elementarsymmetrische Funktionen 4

Allgemeines Prinzip:

$$
\begin{aligned}
s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n \\
s_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#S = k}} \prod_{i \in S} x_i \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 \, x_2 \cdots x_n
\end{aligned}
$$

Was sind das nun für tolle Funktionen?
Warum “elementarsymmetrisch”?

Elementarsymmetrische Funktionen 5

"symmetrisch" bedeutet: Man kann die Variablen vertauschen.

Beispiele:

$$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = s_1(x_2, x_1)$$

oder

$$\begin{aligned} s_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= x_2x_3 + x_2x_1 + x_3x_1 = s_2(x_2, x_3, x_1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1x_2x_3x_4x_5 \\ &= x_3x_2x_5x_1x_4 = s_5(x_3, x_2, x_5, x_1, x_4) \end{aligned}$$

Elementarsymmetrische Funktionen 5

"symmetrisch" bedeutet: Man kann die Variablen vertauschen.

Beispiele:

$$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = s_1(x_2, x_1)$$

oder

$$\begin{aligned} s_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ &= x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1 = s_2(x_2, x_3, x_1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= x_3 x_2 x_5 x_1 x_4 = s_5(x_3, x_2, x_5, x_1, x_4) \end{aligned}$$

Elementarsymmetrische Funktionen 5

"symmetrisch" bedeutet: Man kann die Variablen vertauschen.

Beispiele:

$$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = s_1(x_2, x_1)$$

oder

$$\begin{aligned} s_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ &= x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1 = s_2(x_2, x_3, x_1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= x_3 x_2 x_5 x_1 x_4 = s_5(x_3, x_2, x_5, x_1, x_4) \end{aligned}$$

Elementarsymmetrische Funktionen 6

Auf wie viele Arten kann man die Variablen vertauschen?

- $n = 2$: zwei Vertauschungen möglich
- $n = 3$: sechs Vertauschungen möglich
- $n = 4$: ?

Man nennt jede Funktion mit dieser Eigenschaft "symmetrisch".

Beispiele:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

oder

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$$

Elementarsymmetrische Funktionen 6

Auf wie viele Arten kann man die Variablen vertauschen?

- $n = 2$: zwei Vertauschungen möglich
- $n = 3$: sechs Vertauschungen möglich
- $n = 4$: ?

Man nennt jede Funktion mit dieser Eigenschaft “symmetrisch”.

Beispiele:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

oder

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$$

Elementarsymmetrische Funktionen 7

"elementar" bedeutet:

Jede symmetrische Funktion kann durch die elementarsymmetrischen Funktionen ausgedrückt werden.

Wie geht das?

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Wir finden heraus:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= s_1(x_1, x_2)^2 - 2s_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Elementarsymmetrische Funktionen 7

“elementar” bedeutet:

Jede symmetrische Funktion kann durch die elementarsymmetrischen Funktionen ausgedrückt werden.

Wie geht das?

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Wir finden heraus:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= s_1(x_1, x_2)^2 - 2s_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir stellen fest:

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - s_1(x_1,x_2)\cdot x + s_2(x_1,x_2)$$

und ebenso:

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) &= x^3 - s_1(x_1,x_2,x_3)\cdot x^2 \\ &\quad + s_2(x_1,x_2,x_3)\cdot x - s_3(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}$$

Allgemeiner Zusammenhang

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) &= x^n - s_1(x_1,\dots,x_n)\cdot x^{n-1} \\ &\quad + s_2(x_1,\dots,x_n)\cdot x^{n-2} \\ &\quad + \dots + (-1)^n s_n(x_1,\dots,x_n)\end{aligned}$$

Fazit: Aus den Nullstellen lassen sich die Koeffizienten gewinnen.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir stellen fest:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - s_1(x_1, x_2) \cdot x + s_2(x_1, x_2)$$

und ebenso:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad &= \quad x^3 - s_1(x_1, x_2, x_3) \cdot x^2 \\ &\quad + s_2(x_1, x_2, x_3) \cdot x - s_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

Allgemeiner Zusammenhang

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad &= \quad x^n - s_1(x_1, \dots, x_n) \cdot x^{n-1} \\ &\quad + s_2(x_1, \dots, x_n) \cdot x^{n-2} \\ &\quad + \dots + (-1)^n s_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Fazit: Aus den Nullstellen lassen sich die Koeffizienten gewinnen.

Zusammenhang Koeffizienten ↔ Nullstellen

Wir stellen fest:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - s_1(x_1, x_2) \cdot x + s_2(x_1, x_2)$$

und ebenso:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= x^3 - s_1(x_1, x_2, x_3) \cdot x^2 \\ &\quad + s_2(x_1, x_2, x_3) \cdot x - s_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

Allgemeiner Zusammenhang

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) &= x^n - s_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot x^{n-1} \\ &\quad + s_2(x_1, \ldots, x_n) \cdot x^{n-2} \\ &\quad + \ldots + (-1)^n s_n(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

Fazit: Aus den Nullstellen lassen sich die Koeffizienten gewinnen.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 2

Interessantes Problem:

Kann man aus den Koeffizienten die Nullstellen “berechnen”?

Einfacher Fall:

Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

Da kennen wir die Lösungsformeln

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

also ”‘Ja”’.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 2

Interessantes Problem:

Kann man aus den Koeffizienten die Nullstellen "berechnen"?

Einfacher Fall:

Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

Da kennen wir die Lösungsformeln

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

also "'Ja"'.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 2

Kubische Gleichungen

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Da gibt's auch Lösungsformeln (etwas ekliger):
Durch einen leichten Trick brauchen wir uns nur um solche Gleichungen zu kümmern:

$$x^3 + qx + r = 0$$

Cardano: Man erhält dann eine Lösung beispielsweise durch

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$$

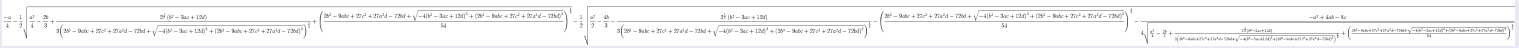
Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 3

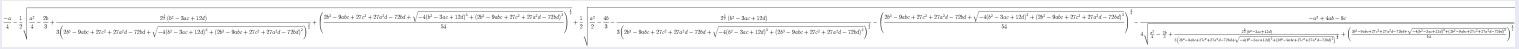
Gleichungen 4ten Grades

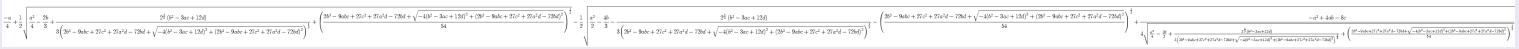
Die vier Nullstellen r_1, r_2, r_3, r_4 einer Gleichung vierten Grades

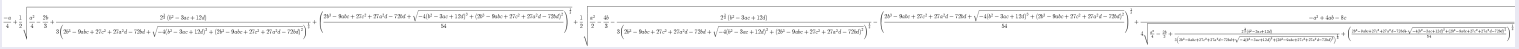
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

werden gegeben durch:

$r_1 =$ 

$r_2 =$ 

$r_3 =$ 

$r_4 =$ 

Diese Formeln sind letztlich zu nichts mehr zu gebrauchen.

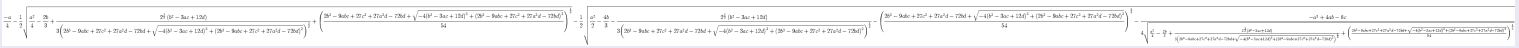
Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 3

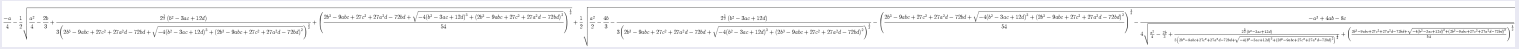
Gleichungen 4ten Grades

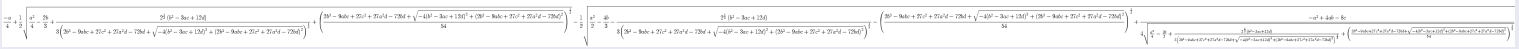
Die vier Nullstellen r_1, r_2, r_3, r_4 einer Gleichung vierten Grades

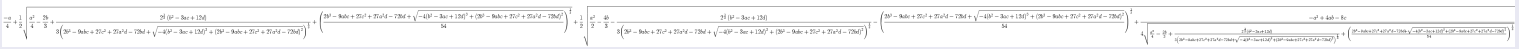
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

werden gegeben durch:

$r_1 =$ 

$r_2 =$ 

$r_3 =$ 

$r_4 =$ 

Diese Formeln sind letztlich zu nichts mehr zu gebrauchen.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 4

Frage

Kann mit – eventuell komplizierten – Formeln jede Gleichung, egal welchen Grades - gelöst werden?

Bezeichnung

Gleichungen, deren Nullstellen sich durch solche Formeln darstellen lassen, nennen wir *auflösbar*.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 4

Frage

Kann mit – eventuell komplizierten – Formeln jede Gleichung, egal welchen Grades - gelöst werden?

Bezeichnung

Gleichungen, deren Nullstellen sich durch solche Formeln darstellen lassen, nennen wir *auflösbar*.

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 5

Wie weiter?

- **Wichtige Tatsache:** Es wird nicht noch ekliger!
- Das bedeutet: Wir müssen keine schlimmen Formeln lernen, denn:
- Es gibt Gleichungen, die nicht aufgelöst werden können.
- Im Allgemeinen können Gleichungen vom Grad ≥ 5 nicht aufgelöst werden.
- Woran liegt das?
- Recht komplizierte Mathematik, aber kurz gesagt:
- Es liegt daran, wie “vertauschbar” die Nullstellen der Gleichung sind.

Das führt uns zum zweiten Teil des Vortrags…

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 5

Wie weiter?

- **Wichtige Tatsache:** Es wird nicht noch ekliger!
- Das bedeutet: Wir müssen keine schlimmen Formeln lernen, denn:
- Es gibt Gleichungen, die nicht aufgelöst werden können.
- Im Allgemeinen können Gleichungen vom Grad ≥ 5 nicht aufgelöst werden.
- Woran liegt das?
- Recht komplizierte Mathematik, aber kurz gesagt:
- Es liegt daran, wie “vertauschbar” die Nullstellen der Gleichung sind.

Das führt uns zum zweiten Teil des Vortrags. . .

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 5

Wie weiter?

- **Wichtige Tatsache:** Es wird nicht noch ekliger!
- Das bedeutet: Wir müssen keine schlimmen Formeln lernen, denn:
- Es gibt Gleichungen, die nicht aufgelöst werden können.
- Im Allgemeinen können Gleichungen vom Grad ≥ 5 nicht aufgelöst werden.
- Woran liegt das?
- Recht komplizierte Mathematik, aber kurz gesagt:
- Es liegt daran, wie “vertauschbar” die Nullstellen der Gleichung sind.

Das führt uns zum zweiten Teil des Vortrags…

Zusammenhang Koeffizienten $\leftrightarrow$ Nullstellen 5

Wie weiter?

- **Wichtige Tatsache:** Es wird nicht noch ekliger!
- Das bedeutet: Wir müssen keine schlimmen Formeln lernen, denn:
- Es gibt Gleichungen, die nicht aufgelöst werden können.
- Im Allgemeinen können Gleichungen vom Grad ≥ 5 nicht aufgelöst werden.
- Woran liegt das?
- Recht komplizierte Mathematik, aber kurz gesagt:
- Es liegt daran, wie “vertauschbar” die Nullstellen der Gleichung sind.

Das führt uns zum zweiten Teil des Vortrags...

Die symmetrische Gruppe

Vorgehen

Grad 2

Gegeben:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Dann können die Nullstellen auf zwei Weisen vertauscht werden, nämlich:

- gar nicht (kein Witz, sondern wichtiger Fall!)
- oder

$$-\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$$

Die symmetrische Gruppe 2

Höherer Grad

Gegeben:

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Dann können die drei Nullstellen auf sechs Weisen vertauscht werden, nämlich?

Einschränkung: Falls eine Nullstelle rational ist (das bedeutet in $\mathbb{Q}$ liegt), dann darf sie nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 2

Höherer Grad

Gegeben:

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Dann können die drei Nullstellen auf sechs Weisen vertauscht werden, nämlich?

Einschränkung: Falls eine Nullstelle rational ist (das bedeutet in $\mathbb{Q}$ liegt), dann darf sie nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 3

Beispiel

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x^2 - 2)(x + 1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 1)$$

Hier sind nur die Vertauschungen “gar nicht” und

$$-\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$$

erlaubt (also wie oben).
Man sagt: Vertauschungen, die $\mathbb{Q}$ “festhalten”

Die symmetrische Gruppe 4

Vertauschungen

- **Wir wissen:** Die Anzahl aller möglichen Vertauschungen war gerade $n!$.
- **Wichtig:** Manchmal sind alle Vertauschungen erlaubt, manchmal müssen sogar noch mehr Vertauschungen ausgeschlossen werden!
- Die Menge der "erlaubten" Vertauschungen ist immer ein Teiler von $n!$.
- Besteht ein *enger Zusammenhang* zwischen den Nullstellen, so dürfen sie auch nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 4

Vertauschungen

- **Wir wissen:** Die Anzahl aller möglichen Vertauschungen war gerade $n!$.
- **Wichtig:** Manchmal sind alle Vertauschungen erlaubt, manchmal müssen sogar noch mehr Vertauschungen ausgeschlossen werden!
- Die Menge der "erlaubten" Vertauschungen ist immer ein Teiler von $n!$.
- Besteht ein *enger Zusammenhang* zwischen den Nullstellen, so dürfen sie auch nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 4

Vertauschungen

- **Wir wissen:** Die Anzahl aller möglichen Vertauschungen war gerade $n!$.
- **Wichtig:** Manchmal sind alle Vertauschungen erlaubt, manchmal müssen sogar noch mehr Vertauschungen ausgeschlossen werden!
- Die Menge der “erlaubten” Vertauschungen ist immer ein Teiler von $n!$.
- Besteht ein *enger Zusammenhang* zwischen den Nullstellen, so dürfen sie auch nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 4

Vertauschungen

- **Wir wissen:** Die Anzahl aller möglichen Vertauschungen war gerade $n!$.
- **Wichtig:** Manchmal sind alle Vertauschungen erlaubt, manchmal müssen sogar noch mehr Vertauschungen ausgeschlossen werden!
- Die Menge der "erlaubten" Vertauschungen ist immer ein Teiler von $n!$.
- Besteht ein *enger Zusammenhang* zwischen den Nullstellen, so dürfen sie auch nicht vertauscht werden.

Die symmetrische Gruppe 5

Beispiel

$$x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x + \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}})(x + \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}})$$

Hier sind alle erlaubt, denn es gibt keinen *Zusammenhang* zwischen den Nullstellen.

Die symmetrische Gruppe 6

Beispiel

$$x^3 - 3x - 1$$

Hier gibt's drei reelle Nullstellen, die alle nicht in $\mathbb{Q}$ sind, trotzdem sind nur drei Vertauschungen erlaubt.
Grund: Ist x_1 eine Nullstelle dieser Gleichung, dann gilt:

$$x_2 = -\frac{1}{1+x_1} \text{ und } x_3 = -\frac{1}{1+x_2} = -\frac{1+x_1}{x_1}$$

Das bedeutet, es gibt einen engen ("zyklischen") Zusammenhang zwischen diesen drei Nullstellen.
Der verhindert, dass man "beliebig" vertauschen darf.

Die symmetrische Gruppe 7

Definition

Das waren die Fragestellungen, die einen Begriff geprägt haben, den Ihr vielleicht kennt:
Die Menge aller möglichen Vertauschungen (= Permutationen) nennt man **symmetrische Gruppe**:

$$S_n = \text{ Menge aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}$$

Beispiel

$$S_1 : \text{ nix Interessantes passiert}$$

$$S_2 = \{ \text{ nix }, \text{ Vertauschung von 1 und 2} \}$$

$$S_3 = \{ \text{ nix }, \text{ zwei zyklische Permutationen,}$$
$$\text{drei einfache Vertauschungen} \}$$

Die symmetrische Gruppe 7

Definition

Das waren die Fragestellungen, die einen Begriff geprägt haben, den Ihr vielleicht kennt:
Die Menge aller möglichen Vertauschungen (= Permutationen) nennt man **symmetrische Gruppe**:

$$S_n = \text{ Menge aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}$$

Beispiel

$$S_1 : \text{ nix Interessantes passiert}$$

$$S_2 = \{ \text{ nix }, \text{ Vertauschung von 1 und 2}\}$$

$$S_3 = \{ \text{ nix }, \text{ zwei zyklische Permutationen,}$$

$$\text{drei einfache Vertauschungen}\}$$

Die symmetrische Gruppe 8

Schreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

- Für jede Permutation gibt's genau eine, die sie wieder rückgängig macht.
  Beispiel:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
  wird rückgängig gemacht durch
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

...

Die symmetrische Gruppe 9

Eigenschaften (fortgesetzt)

- Manchmal sind Permutationen vertauschbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  ist dasselbe wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

  aber es gibt andere Beispiele.

Allgemein benutzt man den Begriff **Gruppe** für Mengen, die genau solche Eigenschaften haben.

Die symmetrische Gruppe 9

Eigenschaften (fortgesetzt)

- Manchmal sind Permutationen vertauschbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist dasselbe wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

aber es gibt andere Beispiele.

Allgemein benutzt man den Begriff **Gruppe** für Mengen, die genau solche Eigenschaften haben.

Die symmetrische Gruppe 10

Es gilt

Die “erlaubten Permutationen” bei den Gleichungen bilden eine **Untergruppe** der symmetrischen Gruppe.

Die Frage war

- Wann kann man aus den Koeffizienten der Gleichung die Lösungen “ablesen”?

oder

- Wann ist die Gleichung durch Formeln auflösbar?

Wann kann man die Gleichungen nun auflösen?

Antwort (jetzt fällt ein bisschen Mathematik vom Himmel):

Wenn die “erlaubten Permutationen” eine ganz spezielle Eigenschaft haben (die man auch “auflösbar” nennt).
Man spricht dann auch von “auflösbaren” Gruppen. das ist das Nächstbessere nach “abelschen” (kommutativen) Gruppen.

Wann kann man die Gleichungen nun auflösen? 2

Es gelten:

- Gleichungen vom Grad ≤ 4 sind auflösbar.
- **Aber:** Im Allgemeinen geht das mit Gleichungen vom Grad ≥ 5 nicht.
- Man kann zeigen, dass ab $n = 5$ Gleichungen existieren, wo die “erlaubten Vertauschungen” und damit die Gleichung nicht auflösbar sind.
- **Formal:** “Die symmetrische Gruppe S_5 ist nicht auflösbar”.

Vergangenheit und Zukunft

Wer hat das herausgefunden??

300 Jahre nach den Lösungsformeln für Grad 3 und 4:

- Evariste Galois (1811 – 1832) und
- Nils Hendrik Abel (1802 – 1829).

Galois

Evariste Galois

(* 25. Oktober 1811 in Bourg-la-Reine; † 31. Mai 1832 in Paris)

- schwieriger Schüler (Lehrerzitat: “Dieser Schüler weiß absolut nichts!”)
- zweimal an der Ecole Polytechnique abgelehnt
- erlebt im Frankreich des frühen 19. Jahrhunderts schwierige politische Stimmung
- droht dem König öfentlich und trägt Uniform der Nationalgarde
- wird zweimal verhaftet
- lernt während Sanatoriumsaufenthalts Stephanie kennen
- duelliert sich (aller Wahrscheinlichkeit nach wegen ihr) und stirbt

Abel

Niels Henrik Abel

(* 5. August 1802 auf der Insel Finnøy, in der Nähe von Stavanger, Norwegen; † 6. April 1829 in Froland, Norwegen)

- wird früh durch politisches Engagement seines Vaters beeinflusst
- erlebt schlechte Schulzeit in Christiania/Norwegen (alle “guten” Lehrer sind an die frisch gegründete Uni abgewandert)
- Vater verfällt nach politischen Misserfolgen dem Alkohol
- muss nun Familie ernähren
- erlebt Missachtung seiner Arbeit in Paris
- erkrankt schwer und stirbt, ans Bett gefesselt

Trotzdem

- Alkohol, Gefängnis, Krankheit, Wahnsinn halten viele nicht ab:
- Gruppentheorie ist ein sehr belebtes und intensives Forschungsgebiet.
- Klassifikation von Gruppen vielfach mit Computereinsatz.
- Computational Mathematics