# Interpolation und Integration mit Polynomen

Philipp Andrea Zardo

Universität Kassel

23. Februar 2006 / Kassel

# Outline

# Was ist numerische Mathematik?

*H. Rutishauer:* Numerische Mathematik befasst sich damit, für mathematisch formulierte Probleme einen rechnerischen Lösungsweg zu finden.

# Continuum

Auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen sind zum Beispiel $x^2$ oder $e^x$.

- Vorteile
  - anschaulich
  - in einfachen Fällen leichter zu handhaben
- Nachteile
  - exakte Darstellung auf einem Computer nicht möglich
  - ineffiziente Berechnung

# Beispiel $e^x$

Die Eulerfunktion $e^x$ besitzt zwei Darstellungen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und

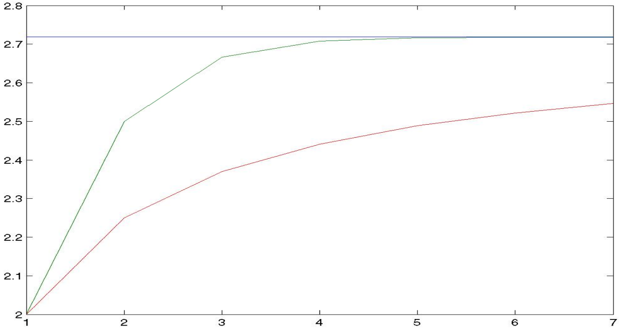
$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

# Die konkrete Berechnung von $e = e^1$

Es gilt

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Zur Veranschaulichung sind die Werte für $n = 1, \ldots, 7$ jeder Berechnungsmethode graphisch dargestellt.



# Ein Algorithmus zur Berechnung der Wurzel

Problem: Zu einer Zahl $a \geq 0$ ist eine Zahl $w \geq 0$ gesucht, für die

$$w^2 = a$$

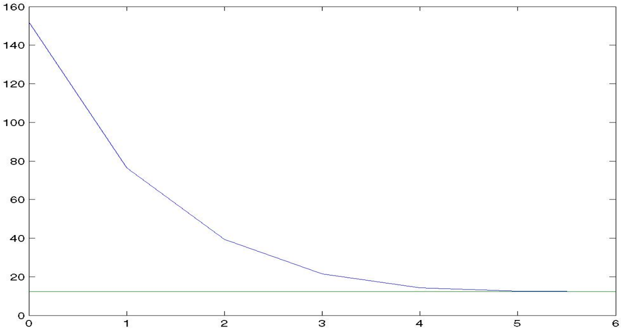
gilt.
Dies läßt sich umformulieren. Gesucht ist die Kantenlänge $w$ eines Quadrates mit der Fläche $a$.

# Konkrete Berechnung von Näherungen für $\sqrt{152}$

Der rekursive Algorithmus

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_i} + a_i\right)$$

mit $a_0 = a$ liefert für $a = 152$ in sechs Iterationsschritten die folgenden Näherungen.



# Polynominterpolation: Das Problem

Man hat $n+1$ Wertepaare (Höhenprofil, Geschwindigkeiten,...) gemessen und unterstellt aus anderen Überlegungen heraus, dass es einen funktionalen Zusammenhang zwischen diesen Größen gibt.

Nun ist man an dieser allgemeinen Funktion interessiert, um auch beliebige Zwischenwerte berechnen zu können.

# Die mathematische Formulierung des Problems

Gegeben sind $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, wobei $y_i = f(x_i)$ der Wert einer unbekannten Funktion $f$ an der Stelle $x_i$ ist.

Man sucht den Wert der Funktion $f$ an beliebigen Stellen $x_G$, also $f(x_G) = ?$.

# Unser Ansatz

Ein möglicher Ansatz ist die Konstruktion eines Polynoms $p$ für das

$$p(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \ldots, n$ gilt.

Die klassischen mathematischen Fragen, die sich an dieser Stelle ergeben, sind die nach

- Existenz und
- Eindeutigkeit

dieses Polynoms $p$.

**Satz (Der Satz von Lagrange)**

*Für $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, existiert genau ein Polynom vom Grad $\leq n$, so dass für $i = 0, \ldots, n$*

$$p(x_i) = y_i$$

*gilt. Es hat die Gestalt*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

# Beweis:

Zuerst macht man sich klar, dass für $p$ in der obigen Gestalt und ein festes $k \in \{0, \ldots, n\}$ tatsächlich

$$p(x_k) = y_k$$

gilt. Einsetzen von $x_k$ liefert

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

Nun beobachten wir für $i = k$

$$\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$$

und für $i \neq k$

$$\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = 0,$$

da irgendwann $x_k = x_j$ gilt. Somit reduziert sich (2) auf

$$p(x_k) = y_k.$$

Man stellt weiterhin fest, dass

$$L_i(x) := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Jetzt bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen.

Dazu eine Vorüberlegung:
Ein Polynom $n$-ten Grades hat maximal $n$ Nullstellen.

Angenommen es gäbe ein weiteres Polynom $q$ vom Grade $\leq n$, so dass für $i = 0, \ldots, n$

$$q(x_i) = y_i$$

gilt, wird gleich gefolgert, dass $p = q$ ist.

Dafür betrachtet man das Differenzpolynom

$$r(x) := p(x) - q(x). \tag{3}$$

Auch $r$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$. Außerdem hat $r$ mindestens $n + 1$ Nullstellen, $x_0, \ldots, x_n$, da

$$p(x_i) = q(x_i)$$

für $i \in \{1, \ldots, x_n\}$ gilt. Nun kann ein Polynom $n$-ten Grades nur $n$ Nullstellen haben. Somit gilt

$$r(x) = 0.$$

Aus (3) folgt durch einsetzen

$$p(x) = q(x).$$

qed.

# Das Problem

Man sucht das Integral

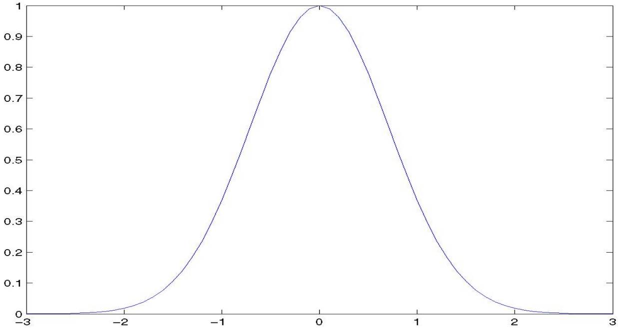
$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Es gibt zahlreiche Funktionen $f(x)$ für die es keine 'einfachen' Stammfunktion gibt oder deren Bestimmung numerisch sehr aufwendig ist.

# Die Gaußverteilung

Ein Beispiel für eine Funktion deren Stammfunktion sich nicht mehr durch elementare Funktionen $(\lambda x^n, e^x, \log(x), \sin(x), \ldots)$ darstellen läßt, ist die gaußsche Normalverteilung

$$e^{-x^2}.$$



# Der Ansatz

Man bestimmt $n+1$ äquidistante Stützstellen $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ und $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ ist.

Zu diesen Stützstellen berechnet man $y_i = f(x_i)$. Erinnerung: $f$ ist gegeben.
Nun legt man ein Interpolationspolynom $p$ durch die entstandenen Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

# Die Newton-Cotes-Formeln

Die Verfahren, welche aus der Integration der Interpolationspolynome $p$ in der lagrangeschen Darstellung entstehen, heißen *Newton-Cotes-Formeln*.

Für eine konkrete Formel muß man dann nur noch ein $n$, d. h. die Anzahl der Stützstellen, wählen.

Dies wird nun ausgeführt:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b p(x)dx &\overset{(1)}{=} \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} y_i \underbrace{\int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx}_{=:\overline{\omega}_i^n} .
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_i^n &= \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \\
&= \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{(n-i)}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (y-j) dy
\end{aligned}$$

Zur weiteren Untersuchung definiert man

$$\omega_i^n := \frac{1}{b-a} \overline{\omega}_i^n.$$

# Die Herleitung der Simpsonregel

Für $n = 2$ und $i = 0, 1, 2$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\omega_i^2 &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^{(2-i)}}{i!(2-i)!}\int_0^2 \prod_{j=0,j\neq i}^{2} (y-j)dy \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^{(2-0)}}{0!(2-0)!}\int_0^2 \prod_{j=1}^{2} (y-j)dy \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

In gleicher Weise berechnet man

$$\omega_1^2 = \frac{4}{6}$$

und

$$\omega_2^2 = \frac{1}{6}.$$

# Die Simpsonregel

Insgesamt ergibt sich die Näherung

$$I_f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Diese Formel ist exakt, falls $f$ ein Polynom maximal dritten Grades ist.

# Die Zusammenfassung

Es wurde gezeigt,

- welche Auswirkungen die Methode der Berechnung auf die Rechendauer hat,
- wie man Interpolationspolynome minimalen Grades konstruiert und
- wie man diese zur näherungsweisen Berechnung von Integralen verwenden kann.

# ENDE