# Stochastik aus der Zeitung

JOACHIM ENGEL

## Herzlichen Glückwunsch zum Doppelgeburtstag!

Der 5. November ist ein besonderer Tag: Gleich zwei Mitglieder des Kaders unserer WM-Fußballnationalmannschaft, nämlich Christoph Metzelder und Mike Hanke, feiern dann ihren Geburtstag.

Auf den ersten Blick könnte das als ein unglaublicher Zufall erscheinen. Das Jahr hat doch 365 Tage, ist es da nicht sehr unwahrscheinlich, dass es unter 23 Personen einen Doppelgeburtstag gibt? Überraschenderweise ist die Chance, dass das passiert, sogar etwas höher als 50 Prozent. Jeder kann sich davon überzeugen, als "Versuchspersonen" stehen bei jedem Fußballspiel die beiden Mannschaften plus Schiedsrichter zur Verfügung.

Das bemerkenswerte Phänomen wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung das "Geburtstagsparadoxon" genannt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Doppelgeburtstag wächst mit zunehmender Personenanzahl wesentlich schneller, als man es erwarten würde. Schon bei 23 Personen übersteigt sie erstmals die 50-Prozent-Marke.

Hier die Analyse: Für eine Person gibt es 365 Möglichkeiten, Geburtstag zu haben, für zwei schon $365 \cdot 365$ usw. Bei 23 Personen muss man die Zahl 365 schon 23 Mal mit sich selbst multiplizieren. Dabei ergibt sich ein gigantisch großer Wert. Wie viele von diesen Möglichkeiten führen zu einem Doppelgeburtstag? Leichter lässt sich ausrechnen, wie oft es vorkommt, dass alle Geburtstage verschieden sind. Wenn die erste Person an irgendeinem Tag Geburtstag hat (365 Möglichkeiten), so gibt es für die zweite nur noch 364 freie Tage, denn einer ist ja schon weg. Das heißt $365 \cdot 364$ Möglichkeiten, dafür, dass die beiden Geburtstage verschieden sind. Bei drei Leuten muss man schon $365 \cdot 364 \cdot 363$ ausrechnen, und bei 23 Personen hat man 23 Faktoren zu berücksichtigen, die jeweils um Eins abnehmen. Das Produkt ist kleiner als die Hälfte der Gesamtzahl, und deswegen ist die Chance, dass die Geburtstage von 23 Personen alle verschieden sind, kleiner als 50 Prozent.

Auch etwas kompliziertere Fragen im Zusammenhang mit den Geburtstagen von 23 Personen lassen sich durch geschicktes Zählen beantworten. So ist es gar nicht einmal besonders unwahrscheinlich (13.6 Prozent), dass es sogar zwei Doppelgeburtstage gibt, und ein Dreifachgeburtstag ist immerhin noch mit knapp 1.3 Prozent Wahrscheinlichkeit zu erwarten. Beinahe wäre es auch im deutschen Kader dazugekommen, denn auch Patrick Owomoyela wurde am 5. November geboren. Doch er taucht in der endgültigen Liste nicht mehr auf.

(aus: DIE WELT, 12. 6. 2006)

## Wiederholte Lottozahlen

Am 21. Juni 1995 wurden im deutschen Lotto die Gewinnzahlen 15-25-27-30-42-48 gezogen. Das bemerkenswerte daran ist, dass genau dieselben Zahlen am 20. Dezember 1986 gezogen wurden, ein Ereignis, dass niemals zuvor in 3016 Ziehungen vorgekommen ist.

Mit etwa 14 Millionen möglichen Kombinationen, wie glaubwürdig ist eine Wiederholung nach 3016 Ziehungen? Welche Ähnlichkeiten gibt es zum Geburtstagsproblem? Wie viele Ziehungen sollte man durchführen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ eine Doppelung auftritt? Wie hoch ist diese Wahrscheinlichkeit bei 3016 Ziehungen? Geben Sie auch ein 95% Vertrauensintervall an.

(aus: Chance News No 3, `http://chance.dartmouth.edu/chancewiki/index.php/Chance_News_3`)

## Das Neueste von Marilyn Savant

Leserbrief an die Kolumne "Ask Marilyn" der amerikanischen Zeitschrift "Parade", 10. April 2005: Meine Frau und ich hatten kürzlich an einer "Rückwärts-Tombola" teilgenommen, bei der jeder Teilnehmer eine Losnummer kauft. Nummerierte Kugeln werden dann eine nach der anderen aus einer Trommel gezogen. Die letzte übrigbleibende Nummer ist der Gewinner. Als die Veranstalter zu den letzten paar Dutzend Kugeln kamen, hatten sie bemerkt, dass sie übersehen hatten, einige Kugeln in die Trommel zu legen. Das holten sie dann nach, und setzten die Ziehungen fort. Hatten die nachträglich hinzugefügten Kugeln nicht eine viel bessere Gewinnchance?

Marilyn antwortet:

"Ja, das haben sie. Da aber jeder die gleiche Chance hatte, eine übersehene Nummer zu haben, ändert das späte Hinzufügen der Kugeln von niemandem die Gewinnchancen. Die Tombola war trotzdem fair."

Darauf protestierte ein anderer Leser (5. Juni 2005): "Marilyn, Ich stimme nicht mit Deiner Antwort überein. Teilnehmer, deren Kugeln zunächst ausgelassen wurden, hatten eine höhere Gewinnchance. Egal, ob sie eine faire Chance hatten, übersehen zu werden – die Tombola war mathematisch nicht fair. Angenommen, es gab 20 Teilnehmer. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sollten für jeden Teilnehmer über das gesamte Spiel hinweg 1:20 sein. Leg 15 Kugeln in eine Schale und nimm 10 weg. Dann füg die fehlenden fünf Kugeln hinzu. Die ersten 15 Kugeln hatten eine Wahrscheinlichkeit von 2/3, nicht mehr dabei zu sein, wenn die fünf zurückgelegten Kugeln in die Schale gelegt werden. Die zurückgelegten Kugel hatten eine Wahrscheinlichkeit von Null, bis zu diesem Zeitpunikt zu den Verlierern zu gehören, schließlich hatten sie eine 1/10 Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen. Lediglich die fünf Kugeln, die die gesamte Zeit in der Schale lagen, hatten eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/20.

- Wer hat denn nun Recht?
- Von welchen Wahrscheinlichkeiten spricht der Leser? Rechnen Sie nach!
- Spielt es eine Rolle, ob die fünf Kugeln vorsätzlich oder zufällig beiseite gelegt wurden?
- Ein anderer Leser reagierte auf diese Darstellung, indem er daraus die Schlussfolgerung herleitete, dass dann die berühmte-berüchtigte amerikanische Einberufungslotterie von 1970 auch fair war (Zur Information siehe J. Engel, 1999, Mathematiklehren, Heft 6, 60-64, suchen Sie im Internet unter "draft lottery" oder lesen Sie unter `http://www.amstat.org/publications/jse/v5n2/datasets.starr.html`).

(aus: Chance News No 6, `http://chance.dartmouth.edu/chancewiki/index.php/Chance_News_6`)

## Zweifacher plötzlicher Kindstod: Zufall oder kein Zufall?

Sally Clark wurde 1999 von einem Gericht in England des zweifachen Mordes an ihren Kindern verurteilt. Innerhalb von zwei Jahren sind zwei ihrer neugeborenen Kinder wenige Wochen nach der Geburt ohne erkenntlichen Grund verstorben. Der Tod des ersten Babys wurde zunächst als "Plötzlicher Kindstod" oder "Sudden Infant Death Syndrome (SIDS)" diagnostiziert. Als aber auch noch ihr zweites Baby starb, wurde Sally Clark unter der Anklage des Mordes an ihren beiden Kindern verhaftet.

Das Urteil bezog sich wesentlich auf die Expertenaussage von Sir Roy Meadow, einem für seine Forschungen zum Thema Kindesmisshandlungen anerkannten Pädiater.

Die alternative Todesursache "Plötzlicher Kindstod" schloss Meadows mit folgendem Argument aus: Für eine Familie wie die Clarks schätzte Professor Meadows das Risiko eines einzigen SIDS-Falles mit 1 zu 8543 an. Vom Richter gefragt, wie hoch die Wahrscheinlichkeit von **zwei** SIDS-Fällen in einer Familie sind, antwortete Professor Meadow: "Man muss die Wahrscheinlichkeit von einem SIDS-Fall mit sich multiplizieren", was ungefähr einer Wahrscheinlichkeit von 1 zu 73 Millionen entspricht. Er fügte hinzu: "In England, Wales und Schottland gibt es pro Jahr etwa 700 000 Lebendgeburten, daher lässt sich feststellen, dass das Vorgefallene rein zufällig ungefähr alle 100 Jahre passiert". Daraufhin wird Sally Clark vom Gericht wegen doppelten Mordes an ihren beiden Kindern verurteilt.

Schließlich schaltete sich die Royal Statistical Society in das Verfahren ein. Im Jahre 2003 wurde das Verfahren neu aufgerollt und Sally Clark wurde nach zweieinhalb Jahren Gefängnis freigesprochen.

- Welche Wahrscheinlichkeiten – wenn überhaupt – hat Professor Meadows denn hier berechnet? Welche Wahrscheinlichkeiten sind relevant?
- Ist es hier angebracht, die Wahrscheinlichkeit für einen SIDS-Fall zu quadrieren?
- Herr Müller hat 6 Richtige im Lotto. Lässt sich mit der Logik von Professor Meadows schließen – da ja 6 Richtige sehr unwahrscheinlich sind – , dass Herr Müller ein Betrüger ist?
- Suchen Sie im Internet unter "prosecutors fallacy" und finden sie heraus, wie dieser Fehlschluss mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zusammenhängt.

(aus: BBC News, 15 July 2005 bzw. `http://chance.dartmouth.edu/chancewiki/index.php/Chance_News_3`; siehe auch: H. H. Dubben, H.-P. Beck-Bornholdt, 2005: Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit. Logisches Denken und Zufall. Rowohlt)