10 Jahre Leitidee Daten und Zufall – ein Blick nach Thüringen

HUBERT LANGLOTZ UND WILFRIED ZAPPE, EISENACH

Zusammenfassung: *In Thüringen wird seit 2002 an vielen Gymnasien mit einem CAS-Rechner gearbeitet und seit dem Schuljahr 2013/2014 wird im Zentralabitur von allen Schülern neben einem hilfsmittelfreien Teil mit einem CAS-Rechner gearbeitet. Insbesondere im Themenbereich der Stochastik ergibt sich dabei eine Reihe von neuen Ansätzen.*[1]

1 Einleitung

Spätestens durch die Veröffentlichung der Bildungsstandards für die Sekundarstufe II für das Fach Mathematik im Oktober 2012 wurde deutlich, das insbesondere im Themenbereich Stochastik die Nutzung digitaler Medien nicht nur gefordert wird, sondern auch wesentliche neue Möglichkeiten eröffnet. Die Leitidee Daten und Zufall „vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software." (KMK, BS 2012)

Obwohl in Thüringen seit der Jahrtausendwende mit CAS-Rechnern gearbeitet wird, stellt gerade dieser Inhaltsbereich für viele Kolleginnen und Kollegen Neuland dar, so dass in Zusammenarbeit mit dem THILLM eine Fortbildungsreihe zur Umsetzung der in den Standards geforderten Themen in Verbindung mit dem Einsatz von digitalen Werkzeugen angeboten wurde.

Die Fortbildungsreihe umfasste die Module

A. Daten erfassen und interpretieren

B. Binomialverteilung und Anwendungen

C. Testen von Hypothesen am Beispiel des Alternativtests.

Im Weiteren soll an Beispielen die Schwerpunktsetzung verdeutlicht werden. Das hier verwendete digitale Werkzeug war der TI-Nspire CAS, weil das der in Thüringen am weitesten verbreitete Rechnertyp ist.

2 Daten erfassen und auswerten – Zufallsexperimente simulieren

Eine der zentralen Ideen dieser Einstiegsfortbildung war den Forderungen der Bildungsstandards entsprechend die Darstellung und Interpretation von Daten. Da Daten häufig über Listen zur Verfügung stehen, der Umgang mit Listen für viele Lehrer neu war, wurde ein erstes Fortbildungsmodul zu diesem Thema geplant. Dabei sollte u. a. bewusst gemacht werden, dass mit diesen Listen eine Reihe von Rechenoperationen möglich sind, und Listen mit dem CAS-Rechner auch einfach grafisch dargestellt werden können.

Dabei besteht sogar die Möglichkeit, Originaldaten z. B. aus einer Excel-Datei in den TI-Nspire CAS einzulesen. Außerdem lassen sich auch gezielte Simulationen zu Zufallsvorgängen durchführen. Zwei kleine Beispiele sollen dies andeuten.

Beispiel 1 (nach einer Idee von R. Biehler)

Die Schülerinnen und Schüler erhalten einen Datensatz mit Geburtszahlen Thüringer Orte. Diese Daten wurden ursprünglich einer Excel Datei entnommen (www.tls.thueringen.de). Sie können dann über TI-Navigator oder im „Schneeballsystem" rasch an die Schüler weitergegeben werden.

A ort	B jungen	C mädc...	D gesamt
Erfurt...	1032	970	2002
Gera,...	354	359	713
Jena,...	495	505	1000
Suhl, ...	127	106	233
Weim...	341	312	653
Eisen...	189	153	342
Heilbad...	72	74	146
Leinefel...	84	94	178

Abb. 1: Lists & Spreadsheet Applikation – Daten

Mögliche Aufgabenstellung: Werte diese Daten hinsichtlich der Anteile von Jungen und Mädchen aus.

Durch die Nutzung von Listenbefehlen (2. Zeile Abb. 2) gelangt man schnell zu grafischen Darstellungen, von denen man dann die für diesen Sachverhalt sinnvollste auswählen kann. Am ehesten wird man wohl hier die Boxplot-Darstellung (Abb. 4) verwenden.

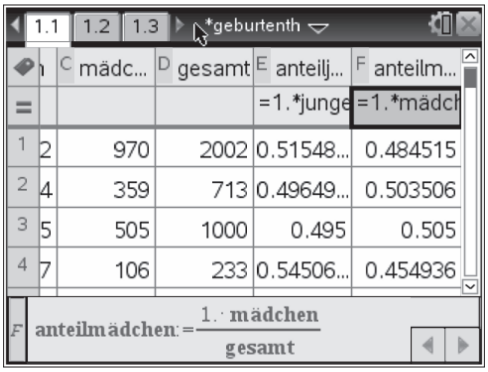

Abb. 2: Lists & Spreadsheet Applikation – Anteile

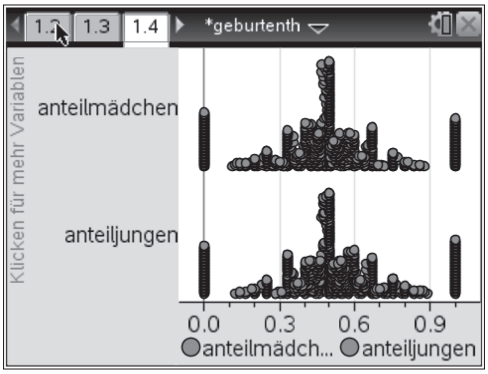

Abb. 3: Data & Statistics Applikation – Punktdiagramm

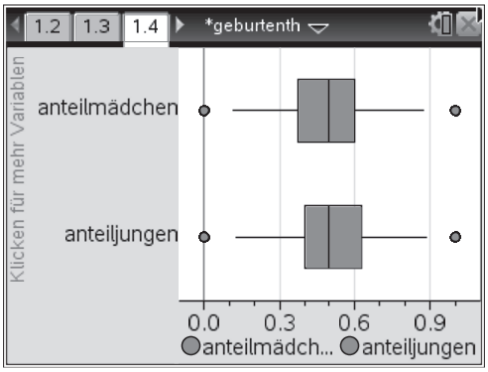

Abb. 4: Data & Statistics Applikation – Boxplot

Eine Berechnung einiger statistischer Kennwerte ist ebenfalls mit Listenbefehlen möglich (Abb. 5).

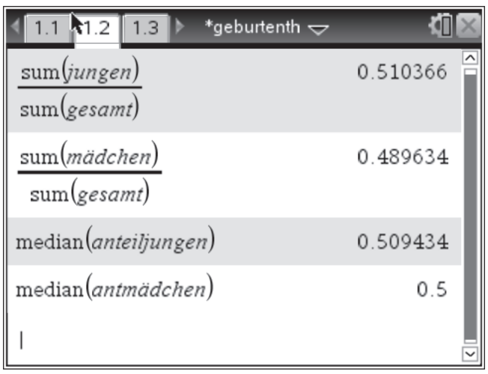

Abb. 5: Calculator Applikation

Weitergehende Aufgabenstellungen (vgl. Abb. 6) könnten so aussehen:

- Erkläre, zu welcher Stadt der am weitesten rechts liegende Punkt gehört.
- Erläutere, wie sich in der Graphik das Gesetz der großen Zahlen zeigt.
- Erkläre die trichterförmige Struktur der Graphik.
- Überprüfe das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz, in dem du die entsprechenden Funktionen in die Graphik hineinskizzierst.

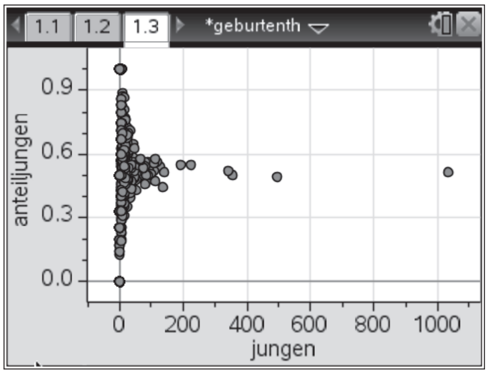

Abb. 6: Data & Statistics Applikation – Jungenanteil

Die Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten durch Simulationen zu schätzen, bekommt durch die Verfügbarkeit von CAS-Rechnern neues Gewicht.

Simulationen können mit dem Rechner auf verschiedene Art und Weise durchgeführt werden. Es existieren vielfältige Rechnerbefehle, die die Arbeit vereinfachen. Während früher oft programmiert werden musste, um z. B. das Ziehen der Lottozahlen zu simulieren, kann man dies jetzt viel einfacher durchführen. Der TI-Nspire CAS verfügt dazu beispielsweise über den Befehl *randSamp()*.

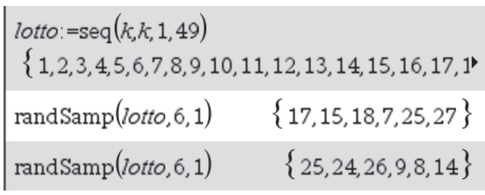

Abb. 7: randSamp()-Befehl

Wesentlich erscheint uns aber, sich hierbei auf wenige Befehle zu konzentrieren, die Simulationen eher einfach zu halten und die Möglichkeiten zu nutzen, die die Tabellenkalkulation bietet. Kleine Programme sollten, wenn überhaupt, vorgegeben werden und deren Erstellung nicht Ziel des Mathematikunterrichts sein.

Beispiel 2: Hinführung zum Geburtstagsproblem mit einer einfachen Simulation

Aufgaben:

- Führt eine Simulation zu folgendem Problem durch und fasst eure Daten in der Klasse dann tabellarisch zusammen:
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf Schülern mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag haben.
- Führt gemeinsam 300 Simulationen durch und gebt einen Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.

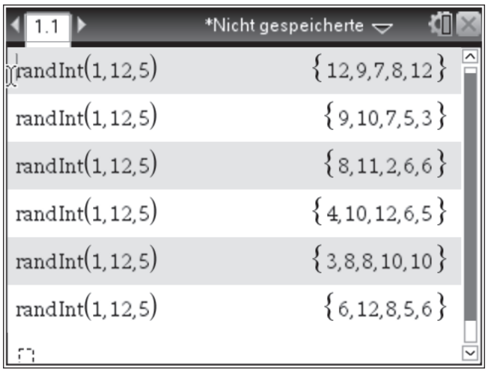

Abb. 8: randInt()-Befehl

In einer Klasse hat man so schnell 300 Versuche durchgeführt und kann dies gemeinsam auswerten.

3 Ein anwendungsorientiertes Beispiel zur Binomialverteilung

Thüringer Lehrer bewegt im Zusammenhang mit dem verpflichtenden CAS-Einsatz unter anderem die Frage, wie die Schüler ihre Lösungen der Aufgaben einer schriftlichen Lernerfolgskontrolle so dokumentieren, dass der Lösungsweg und seine Bewertung transparent werden. Ziel muss es dabei u. a. sein, die Schüler sowohl über ihr mathematisches Verständnis als auch über den sachgerechten Umgang mit dem digitalen Werkzeug zu prüfen.

> „Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten." (Bildungsstandards KMK, 2012)

Um dieses Ziel zu erreichen hat sich u. a. bewährt, die Aufgaben unter Verwendung geeigneter Operatoren (wie „Beschreiben", „Erläutern", „Erklären") so zu formulieren, dass die Schüler zu einer Dokumentation im Sinne der Bildungsstandards hingeführt werden. Durch explizite Hinweise auf dem Aufgabenblatt sollten entsprechende Erwartungen zum Ausdruck gebracht und ggf. über die Korrektur eingefordert werden.

Das folgende Beispiel soll illustrieren, wie eine komplexe Aufgabe zur Binomialverteilung formuliert sein könnte.

Multiresistente Erreger im Krankenhaus
(Apothekenumschau, 1. Dezember 2013)

Krank durch das Krankenhaus

Im Schnitt erkrankt jeder 23. Krankenhauspatient an einer Infektion, etwa 15 Prozent davon an multiresistenten Erregern (MRE). Diese Keime sind besonders gefährlich, denn Antibiotika können ihnen nichts anhaben. In Deutschland infizieren sich damit mehr Krankenhauspatienten als in anderen Ländern. Laut einer Studie der Universität Bremen und der Handelskrankenkasse könnten 30 % der Fälle durch bessere Hygiene verhindert werden. Hierzulande, so die Experten, herrsche aber seit jeher eine Geringschätzung des Fachbereiches Hygiene an den Kliniken.

Abb. 9: Krank durch das Krankenhaus

Betrachten Sie im Folgenden X: „Anzahl der an MRE erkrankten Personen" als binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und $p = 0{,}0065$.

a) Begründen Sie, dass es sich hierbei um eine mögliche Modellannahme handelt. Gehen Sie auch auf Grenzen dieses mathematischen Modells ein.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X für $n = 10$ im Histogramm dar. Interpretieren Sie dieses Diagramm.

c) Geben Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X für $n = 1000$ an. Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

d) Erläutern Sie, für welches Ereignis E der Term $\sum_{k=2}^{5} \binom{500}{k} \cdot 0{,}0065^k \cdot 0{,}9935^{500-k}$ die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ im vorliegenden Sachzusammenhang beschreibt. Berechnen Sie den Wert dieses Terms.

e) Bearbeiten Sie für die Zufallsgröße X die folgenden Aufgaben.

   (1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als fünf von 350 Patienten an MRE erkranken.

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 350 Patienten mindestens 30 % mehr als erwartet werden, an MRE erkranken.

(3) Untersuchen Sie, wie viele Patienten man mindestens untersuchen muss, damit man mit mindestens 80 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen an MRE erkrankten Patienten findet.

(4) Wie viele Patienten muss man wenigstens untersuchen, um mit mindestens 80 %iger Wahrscheinlichkeit mehr als einen an MRE erkrankten Patienten zu finden? Beschreiben und realisieren Sie eine Methode zur Lösung dieser Fragestellung.

Ausgewählte Lösungen von Schülern:[2]

Zu a)

Wenn jeder 23. an einer Infektion erkrankt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür $p = \frac{1}{23}$. *Wenn davon nun 15 % an MRE erkranken, dann ist die Gesamtwahrscheinlichkeit des Patienten an MRE zu erkranken* $p = \frac{1}{23} \cdot 0{,}15 = 0{,}0065$.

Von Binomialverteilung spricht man, wenn es für ein Experiment immer nur zwei verschiedene mögliche Ergebnisse gibt. Dieses muss unabhängig voneinander beliebig oft wiederholt werden können. Wenn man nun aber in diesem Falle nicht an MRE zu erkranken und an MRE zu erkranken als die einzig möglichen Ergebnisse ansieht, dann kann man dies als binomialverteilt bezeichnen.

Die Erläuterungen, wie die Größe $p = 0{,}0065$ zustande kommt und unter welchen Voraussetzungen X als binomialverteilt angesehen werden kann, sind richtig. Hier wird allerdings nicht darauf eingegangen, warum es sich mit der Binomialverteilung und den angenommenen Parametergrößen nur um eine mögliche Modellannahme handelt. (Vermutlich wird es Krankenhäuser geben, bei denen MRE-Fälle häufiger oder seltener auftreten. Darf man überhaupt davon ausgehen, dass zufällig ausgewählte Patienten unabhängig voneinander an MRE erkranken?)

Zu b)

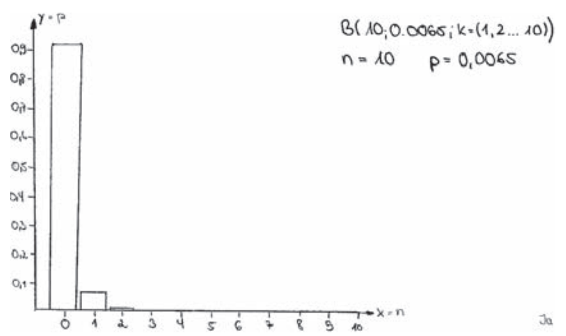

Abb. 10: Schülerlösung – Skizze

Dargestellt wird ein Histogramm eines binomialverteilten Zufallsexperiments. In der x-Achse wird die Anzahl der Wiederholungen dargestellt und die y-Achse zeigt die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Man sieht, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,7 % keiner erkrankt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,1 % gibt es einen Erkrankten unter den 10 Untersuchten. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der Untersuchten krank sind, geht in Richtung 0 (0,2 %).

Sprachlich ungenau ist die Formulierung „Histogramm eines binomialverteilten Zufallsexperiments“. Dargestellt wird die Verteilung einer Zufallsgröße. Außerdem fehlt rechts oben neben dem Diagramm in der Liste für k der Wert $k = 0$. Die Interpretation ist unvollständig, weil Aussagen für $P(X > 2)$ fehlen. Auf der x-Achse wird nicht die Anzahl der Wiederholungen, sondern der „Treffer“ abgebildet.

Zu c)

d) $\mu(x) = 1000 \cdot 0{,}0065 = 6{,}5$

$\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$\sigma(x) = \sqrt{1000 \cdot 0{,}0065 \cdot (1 - 0{,}0065)} = 2{,}54$

$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma)$

$P(6{,}5 - 2{,}54 \leq x \leq 6{,}5 + 2{,}54)$

$\underline{3{,}96 \leq x \leq 9{,}04}$

Abb. 11: Schülerlösung zu c)

Hier wurde vergessen, die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Da X nur ganzzahlige Werte annimmt, muss $P(4 \leq X \leq 9)$ bestimmt werden.

Zu d)

Das Ereignis des Terms gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei 500 Patienten 3, 4 oder 5 mal eine MRE-Erkrankung auftritt.

$P(500; 0{,}0065; 3 \leq k \leq 5) = 0{,}5207$

Abb. 12: Schülerlösung zu d)

Die Formulierung „das Ereignis des Terms“ ist nicht treffend.

Zu e)

1) $B(350; 0{,}0065; 0 \leq k \leq 4) = 0{,}9197$

2) $B(350; 0{,}0065; 105 \leq k \leq 350) = 0$

3) $B(n; 0{,}0065; 1 \leq k \leq n) \mid n = 250 = 0{,}8041$

4) $B(n; 0{,}0065; 2 \leq k \leq n) \mid n = 460 = 0{,}8003$

$\longrightarrow$ Systematisches Probieren führt zur Lösung

Abb. 13: Schülerlösung zu e)

Die Lösungsdokumentation ist zu knapp.

- Sie lässt nicht erkennen, wo der Fehler in (2) liegt.
- Wünschenswert sind kurze Antwortsätze mit Bezug auf den Kontext der Aufgabe.

Eine besser gelungene Dokumentation zeigt die folgende Lösung:

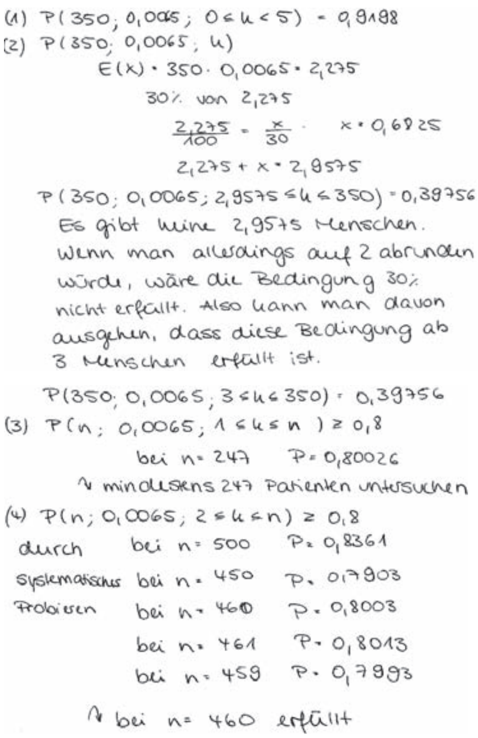
(1) P(350; 0,0065; 0 ≤ k < 5) = 0,9188
(2) P(350; 0,0065; k)
E(X) = 350 · 0,0065 = 2,275
30% von 2,275
$\frac{2,275}{100} = \frac{x}{30}$ x = 0,6825
2,275 + x = 2,9575
P(350; 0,0065; 2,9575 ≤ k ≤ 350) = 0,39756
Es gibt keine 2,9575 Menschen.
Wenn man allerdings auf 2 abrunden würde, wäre die Bedingung 30% nicht erfüllt. Also kann man davon ausgehen, dass diese Bedingung ab 3 Menschen erfüllt ist.
P(350; 0,0065; 3 ≤ k ≤ 350) = 0,39756
(3) P(n; 0,0065; 1 ≤ k ≤ n) ≥ 0,8
bei n = 247   P = 0,80026
⇝ mindestens 247 Patienten untersuchen
(4) P(n; 0,0065; 2 ≤ k ≤ n) ≥ 0,8
durch   bei n = 500   P = 0,8361
systematisches   bei n = 450   P = 0,7903
Probieren   bei n = 460   P = 0,8003
bei n = 461   P = 0,8013
bei n = 459   P = 0,7993
⇝ bei n = 460 erfüllt

Abb. 14: ideale Schülerlösung zu e)

Abgesehen von eventuellen fachlichen Unzulänglichkeiten kann man i. A. bezüglich der „Dokumentation" registrieren:

- Die Dokumentation fällt häufig zu knapp aus.
- Zusammenhänge werden nicht ausreichend erläutert, sodass der Lösungsweg schlecht nachvollziehbar ist.
- Mathematischer Formalismus und Rechnersprache werden vermischt.
- Oft ersetzt die Rechnersprache die mathematische Fachsprache.

Hier kann man im Unterricht gezielt gegensteuern, wenn die Lehrkraft ein persönliches Vorbild (Tafelbild!) ist, konsequent eine ausreichende Dokumentation bei allen Gelegenheiten einfordert und sowohl positiv als auch negativ sanktioniert. Dabei sollte man unterscheiden zwischen Lern- und Leistungssituationen. Besonders, wenn CAS-Rechner neu für die Schüler sind, sollte man zunächst in Lernsituationen auch zulassen, dass mitunter die verwendeten Befehle notiert werden. Beständige Hinweise auf eine fachgerechte Sprache werden die (meisten) Schüler daran gewöhnen, diese auch zu gebrauchen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass über eine angemessene Aufgabenformulierung und das Bewusstmachen der Notwendigkeit guter Lösungsdokumentationen gezielt Einfluss auf den „Aufschrieb" von Ergebnissen durch die Schüler genommen werden kann.

4 Daten beurteilen

Da im Mathematiklehrplan 2011 für Gymnasien in Thüringen nur der Alternativtest verbindlich war, konzentrierten sich die Fortbildungen hierauf. Insbesondere bei der Einführung der neuen Thematik kamen die Vorteile eines digitalen Werkzeuges zum Tragen. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

Hinführung zum Alternativtest

(nach Heinz Klaus Strick „Stochastik mit dem TI-Nspire CX (GTR)" (TI-Hefte, 2013))

In einem Spielautomat dreht sich ein Glücksrad mit 40 gleich großen Sektoren, von denen entweder 10 oder 24 rot sind, die restlichen Sektoren sind grün. Man gewinnt, wenn das Glücksrad auf einem rot gefärbten Sektor stehen bleibt. Der Spieler weiß nicht, welche der beiden Situationen bezüglich der Anzahl roter Sektoren vorliegt. Er will eine Entscheidung treffen, indem er einen Test durch zwanzigmaliges Drehen des Glücksrades durchführt und das Ergebnis beurteilt.

(1) Begründe, unter welchen Voraussetzungen sich hier die Binomialverteilung als Modell für die Anzahl der roten Felder eignet.

(2) Wie oft wird er in den beiden Fällen Rot zu erwarten haben?

(3) Bei welchen Anzahlen für Rot sollte er sich deiner Meinung nach gegen ein Glücksrad mit 10 oder 24 roten Sektoren entscheiden?

(4) Stelle beide Verteilungen grafisch dar und veranschauliche in der Grafik die Bereiche, in denen die Hypothese, dass 10 bzw. 24 rote Felder vorhanden sind, nach deinen Festlegungen in Teilaufgabe 2 irrtümlich abgelehnt wird.

Der Zugang zum Hypothesentesten sollte aus unserer Sicht möglichst an die Erfahrungen der Schüler anschließen und nicht sofort mit dem formalen Konstrukt beginnen (Moosburger 2014, S. 2). Dies heißt hier, dass Schüler relativ schnell auf den Gedanken kommen, die Mitte zwischen beiden Mittelwerten als eine vernünftige Regel vorzuschlagen. Das Unterrichtsgespräch umfasst dann in etwa das Folgende:

1. Gründe für das Modell der Binomialverteilung:
   - bei jeder Drehung sind nur genau zwei Ergebnisse möglich,
   - die Wahrscheinlichkeiten für Rot sind für jede Drehung unabhängig von den anderen Drehungen und sind konstant.
2. Berechnung der Erwartungswerte liefert 5 bzw. 12.
3. Vernünftig wäre es daher zu entscheiden, in die Mitte zwischen 5 und 12 die Entscheidungsgrenze zu legen, also bei $k = 8{,}5$. Das bedeutet, wenn das Ergebnis 0, 1, …, 7, 8 ist, dann entscheide dich gegen $p = 0{,}6$, sonst gegen $p = 0{,}25$.
4. Welche Risiken geht man mit beiden Entscheidungen ein? Dies kann nun durch ein digitales Werkzeug direkt vor Augen geführt werden.

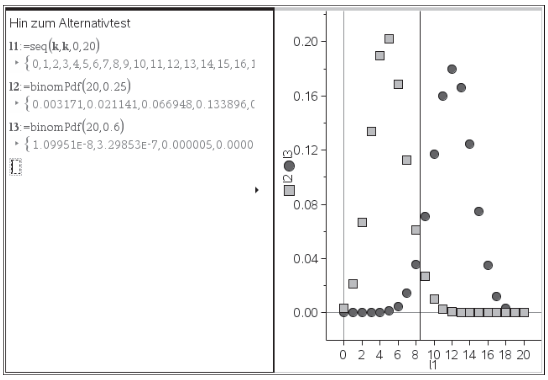

Abb. 15: Verteilungen beim Alternativtest

Relativ schnell kann man dann die beiden Risiken berechnen.

Abb. 16: Berechnungen beim Alternativtest

Betrachten wir dazu noch eine leicht modifizierte Teilaufgabe aus einer ehemaligen Abituraufgabe (Thüringen Nachabitur, Grundfach Mathematik 2006).

> Ein Angriffsspieler der Mannschaft B behauptet, dass seine Elfmeter-Trefferquote nicht 75 % sondern 85 % beträgt.
>
> Der Trainer von B will die Hypothese H_0: $p = 0{,}75$ gegen H_1: $p = 0{,}85$ mit einem Stichprobenumfang von 30 Elfmetern testen.
>
> Bei mehr als 24 Treffern will sich der Trainer für die Hypothese H_1 entscheiden. Erläutern Sie, welche Fehler dabei auftreten können und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler.
>
> Ermitteln Sie eine zugehörige Entscheidungsregel für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art höchstens 0,05 betragen soll!

Zwei nicht ganz vollständige Schülerlösungen seien hier angeführt (auch teilweise transkribiert).

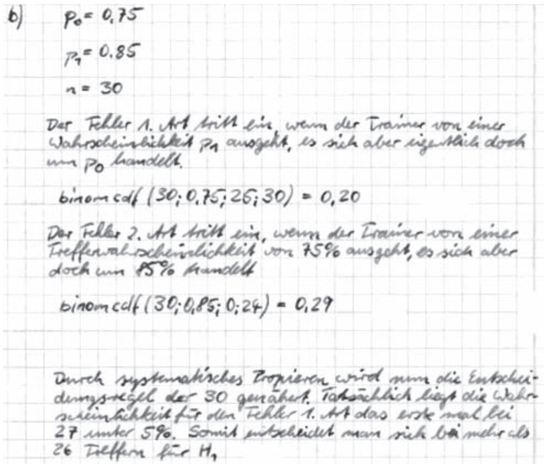

Abb. 17: Schülerlösung Aufgabe b)

Durch systematisches Probieren wird nun die Entscheidungsregel der 30 genähert. Tatsächlich liegt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art das erste Mal bei 27 unter 5 %. Somit entscheidet man sich bei mehr als 26 Treffern für H_1.

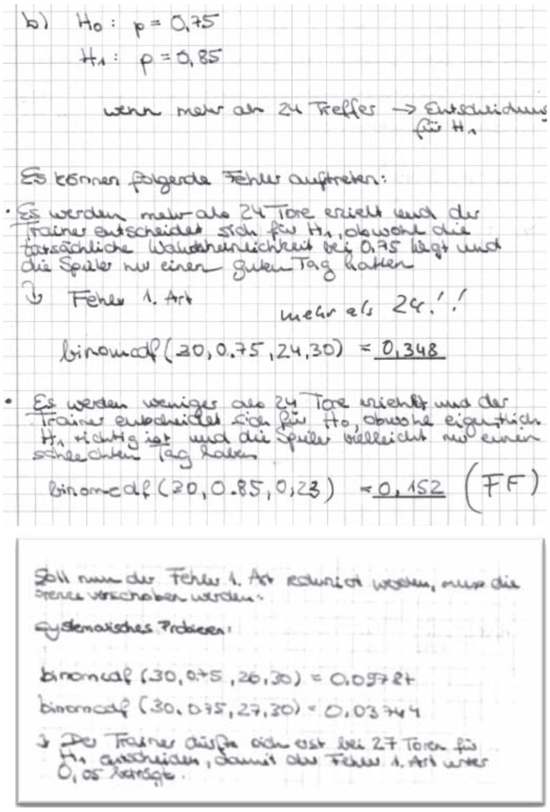

Abb. 18: Schülerlösung weiter Aufgabe b)

Soll nun der Fehler 1. Art reduziert werden, muss die Grenze verschoben werden:

Systematisches Probieren:

binomcdf(30,0.75,26,30) = 0,09784

binomcdf(30,0.75,27,30) = 0,03744

Der Trainer dürfte sich erst bei 27 Toren für H_1 entscheiden, damit der Fehler 1. Art unter 0,05 liegt.

5 Schwerpunkt Simulationen

Eulersche Zahl mit Zufallsexperiment simulieren

Um die Bedeutung von Simulationen zu veranschaulichen, benötigt man auch Beispiele, die nicht sofort einsichtig oder klar erscheinen.

> Man addiere Zufallszahlen zwischen 0 und 1 solange, bis die Summe größer 1 ist. Manchmal genügen zwei, manchmal drei …
>
> „Im Durchschnitt braucht man jedoch 2,71828… Zahlen, bis die Summe größer 1 ist.
>
> (Simon Singh „Homers letzter Satz“ S. 181).

Eine Simulation ist auf verschiedene Art und Weise möglich (vgl. Abb. 19). In der Spalte A werden mehrfach durch Neuberechnung 10 Zufallszahlen mit dem Befehl *rand(10)* bestimmt. In der Spalte B wird die kumulierte Summe berechnet und in Zelle C1 wird geprüft, ab wann man einen Wert größer 1 erhält. Dieser Wert wird dann in Spalte D erfasst und letztendlich wird in Zelle C3 der Mittelwert aller Berechnungen angegeben.

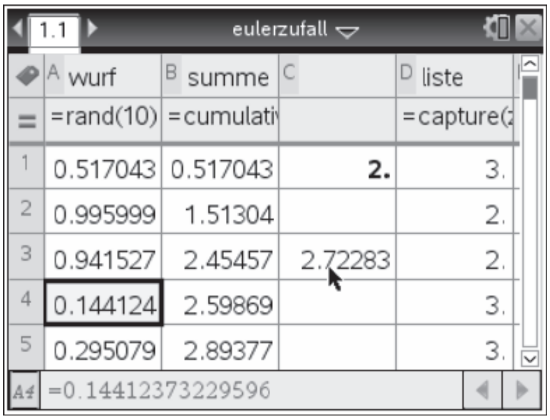

Abb. 19: Lists & Spreadsheet Applikation – Simulation

Eine weitere Möglichkeit der Simulation bietet sich an, indem durch Schachtelung von CAS-Befehlen die gleiche Simulation mehrfach durchgeführt werden kann. Hier erweist sich der Befehl *countif()*, vergleichbar mit dem *Zählewenn*-Befehl aus Excel, als hilfreich.

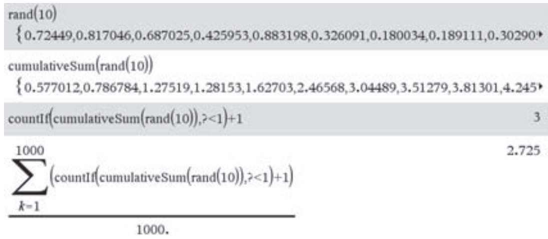

Abb. 20: Calculator Applikation – Auswertung Simulation

Man sieht relativ schnell, dass man sich der Zahl 2,72 … 2,73 nähert. Die mathematische Erklärung hierfür findet man z. B. in Engel (1976, S. 93 ff).

Anmerkungen

1 Die aufgeführten Beispiele sind auch schon mit Grafikrechnern (GTR) zu lösen, da die Bearbeitung kein CAS erfordert, zur Bearbeitung ist aber auch jede Tabellenkalkulation geeignet.

2 Wegen der besseren Lesbarkeit werden die Schülerlösungen zum Teil transkribiert wiedergegeben.

Literatur

Apothekenumschau, 1. Dezember 2013, Seite 6

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)

Engel, A. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 2. Stuttgart: Klett.

Moosburger, M. (2014). Unklare Begriffe und Wunschdenken bei Signifikanztests, *Stochastik in der Schule 34*(1), S. 2–8.

Singh, S. (2013): Homers letzter Satz. München: Hanser Verlag.

Anschrift der Verfasser

Hubert Langlotz
Elisabeth-Gymnasium Eisenach
Nebestraße 24, 99817 Eisenach
hlanglotz@gmx.de

Wilfried Zappe
wilfried.zappe@gmx.de