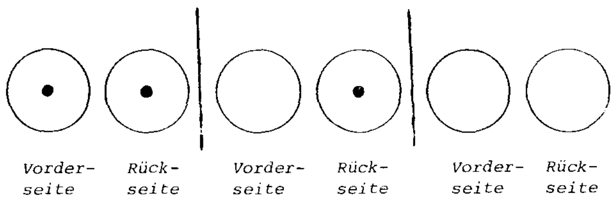
DIE BEHANDLUNG DER WAHRSCHEINLICHKEIT IN EINER GRUNDSCHULKLASSE

P. SHERWOOD
Übersetzt von M. Olschewski

In welchem Alter fangen Kinder an, die Wahrscheinlichkeit im Prinzip zu erfassen ? Nach P. Sherwoods Erfahrung kann man ein Großteil dazu schon vor dem elften Lebensjahr beitragen.

Entsprechend dem heutigen Zeitgeist, der zurück zu den Grundlagen strebt, könnte es empfehlenswerter erscheinen, die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes erst in der Sekundarstufe durchzuführen. Der Ungar Tamas Varga jedoch bezweifelte nie, daß Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit auch in der Grundschule schon von Wichtigkeit sind. Er hat seine Ideen mit kleinen Kindern ausprobiert und im Laufe der Jahre weiterentwickelt. Wenn er mit den Kindern arbeitet, behauptet er gewöhnlich, daß ihm selbst die vorgestellten Aufgaben ebensoviel Kopfzerbrechen bereiten wie den Kindern und daß bei gemeinsamer Betrachtung ihre Vorschläge und Lösungsansätze meist wertvoller sind als seine. Er läßt den Kindern also viel Freiheit.

Als ich ihn vor zwölf Jahren zum ersten Mal bei der Arbeit mit Kindern in meiner Schule beobachtete, legte er drei wie folgt markierte Scheiben vor:



Diese Scheiben zeigte er den Kindern und forderte sie auf

zu raten, ob sich auf der Rückseite ein Punkt befindet oder nicht. Nach anfänglichem wahllosem Raten der Kinder bat er sie, ein System für ihr Raten zu ersinnen und aufzuschreiben, das sie dann jedes Mal anwenden würden. Einige versuchten ständig die gleiche Lösung wie beim vorangegangenen Mal zu nennen, andere wählten abwechselnd Punkt bzw. kein Punkt. Niemand kam auf die beste Strategie (was auf der Vorderseite ist, ist wahrscheinlich auch auf der Rückseite). Dann ließ er ein Kind diese Strategie benutzen mit dem Erfolg, daß es bei fünfzigmaligem Anwenden ständig die besten Resultate erhielt. Das veranlaßte die Kinder zum Nachdenken und zu Vorschlägen über die Gründe, wie es dazu kommen konnte. Ihr Denken war intuitiv, so daß natürlich niemand mit einer numerischen Lösung aufwarten konnte. Aber ihre Antworten zeigten, daß sie einige Grundideen der Wahrscheinlichkeit zu erfassen begonnen hatten. Aus dieser Arbeit entstand ein 'Wahrscheinlichkeits-Baukasten' für Kinder und zwei Bücher:

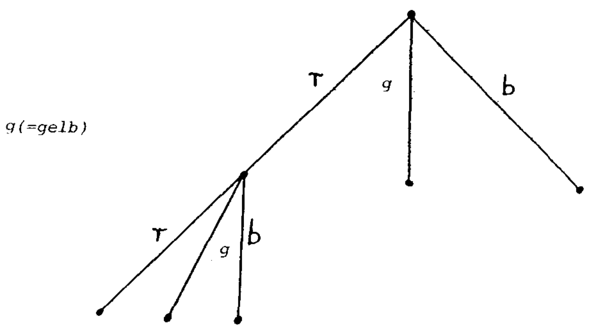
Engel, Varga, Walser: 'Hasard ou Stratégie'
O.C.D.L. Paris

und

Varga, Dumont: 'Combinatoire, Statistiques et Probabilités', O.C.D.L. Paris.

Das meiste Material aus diesem Baukasten ist bekannt von anderen Spielen. Normalerweise beginnt das Arbeiten mit einem Spiel oder dem Aufbau von irgendwelchen Dingen. Das könnte der Bau eines Hauses unter gewissen Bedingungen sein, wie z.B. die Benutzung dreier beliebiger Farben für ein dreistöckiges Haus. Dabei sollen alle Häuser bezüglich der Farbzusammenstellung unterschiedlich sein. Man darf jede Farbe so oft benutzen, wie man will, also z.B.

(rot, rot, rot) oder (rot, rot, gelb) etc. Wieviele solcher dreistöckiger Häuser kann man mit drei Farben bauen ? Kindern, die mit ähnlichen Spielen schon Erfahrung haben, erscheint das Problem vertraut. Sie werden sich bei der Lösung eine bestimmte Strategie zu eigen machen, z.B.: 'beginne mit all den Häusern, die einen roten Baustein als erstes Stockwerk haben'. Kinder ohne vorherige Erfahrung versuchen Zufallslösungen, die meist unproduktiv sind. Für sie mag folgender Baum als Anleitung dienen:



Sicherlich erweist es sich als besser, einen unvollendeten Baum vorzugeben und es den Kindern zu überlassen, ihn selbständig zu entwickeln. Ich habe diese Aufgabenstellung mit schwächeren Schülern einer dritten Klasse durchgeführt und sie beschäftigten sich damit intensiv eine beträchtliche Zeit lang. Nachdem sie die Aufgabenstellung bearbeitet hatten, forderte ich sie auf, die Einzelteile eines aus

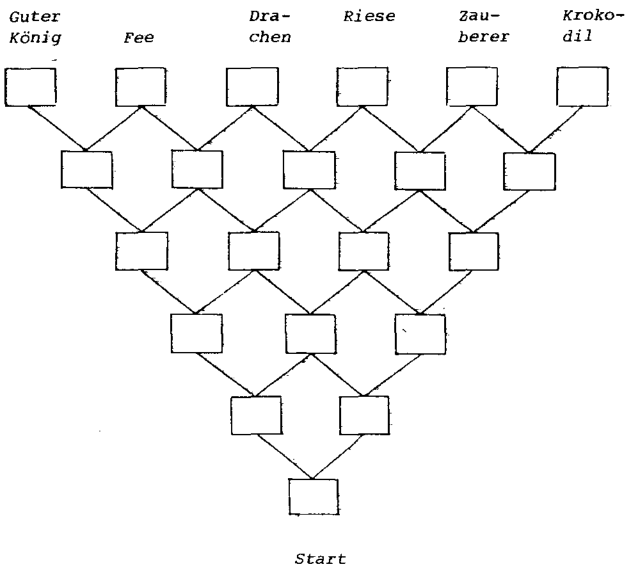
drei Farben bestehenden Satzes von 'trimath' (einem Kombinationsspiel) so anzuwenden, daß sie den obigen Häusern entsprachen. Die Kinder konnten diese Aufgabe lösen, indem sie die Bezeichnungen des Baumes austauschten. Danach konnten Sie, ohne auf ihre Aufzeichnungen zu schauen, jedem Teil von 'trimath' das entsprechende Haus zuordnen. Begabtere Kinder gingen sogar so weit, daß sie sowohl den 'trimath'-Teilen als auch den Häusern die triadischen Zahlen von 001 bis 222 zuordnen konnten.

Nicht alle kombinatorischen Aufgaben von Varga sind jedoch so einfach wie die obige. In einer anderen Aufgabe müssen die Kinder so viele Zahlen wie möglich bilden unter der Bedingung, daß lediglich Ziffern größer als 7 benutzt werden dürfen und nicht zwei Neunen nebeneinander stehen dürfen. Die Kinder entwarfen folgende Tabelle für ihre Ergebnisse:

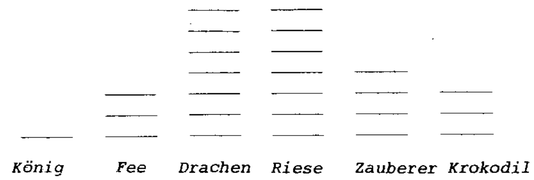
Gegeben: Ziffern größer als 7; keine 9 neben einer anderen		
Anzahl der Ziffern	mögliche Zahlen	Anzahl der Zahlen
1	8, 9	2
2	88, 89, 98	3
3	888, 889, etc.	5

In einer anderen Aufgabe soll herausgefunden werden, auf wieviele Arten eine Treppe erstiegen werden kann, wenn man entweder eine oder zwei Stufen auf einmal nimmt. Man beginnt mit einer Treppe von einer Stufe und erhöht die Zahl der Stufen dann jeweils um eins. Es gibt ähnliche Aufgaben, die die gleichen Zahlenfolgen entstehen lassen. Man erhofft, daß die Kinder die gemeinsame Struktur dieser Probleme erkennen. Dies stellt sich jedoch nicht sofort ein, sondern erfordert etwas Hilfestellung.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird auf diese Weise spielerisch angegangen. Hier ein typisches Brettspiel, das man mit einem Würfel spielt, der aus drei grünen und drei weißen Flächen besteht:



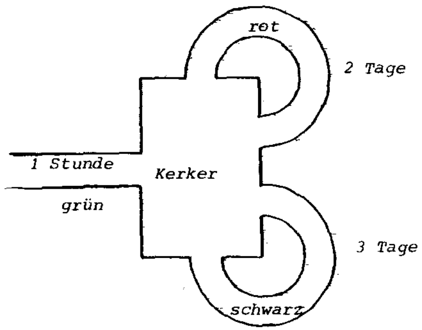
Reihum würfelt jeder Spieler und bewegt eine seiner Spielmarken ein Feld nach links, wenn der Würfel grün zeigt, bzw. nach rechts, wenn er weiß zeigt. Wenn man für jede Spielmarke ihren Zielpunkt festhält, ergäben sich z.B. folgende Häufigkeiten:



Wie kommt es, daß so viele Spielmarken schließlich beim Drachen oder beim Riesen landen und nur so wenige den König oder die Fee erreichen ? Aus dieser Frage heraus läßt sich auf das Pascalsche Dreieck hinarbeiten oder zumindest lassen sich Hinweise auf seine Existenz anbringen.

Die Spiele erzeugen Interesse und Anteilnahme, aus denen sich Lernen entwickelt. Vargas Spiel 'Dieb von Bagdad' entwickelt sich bei uns zur 'Flucht aus Colditz'. Diebe werden in das dunkelste Verlies gebracht. Drei Tunnels führen aus dem Gefängnis heraus. Einer führt in die Freiheit und wird in einer Stunde durchquert. Die anderen beiden führen zurück in den Kerker und erfordern eine Zeit von zwei bzw. drei Tagen. In den Tunnels befindet sich nur für 5 Tage und eine Stunde genügend Luft und Wasser zum Überleben. An einem Tag werden 27 Diebe ins Verlies geworfen. Wieviele werden wahrscheinlich überleben ? Um das herauszufinden spielen wir folgendes Spiel.

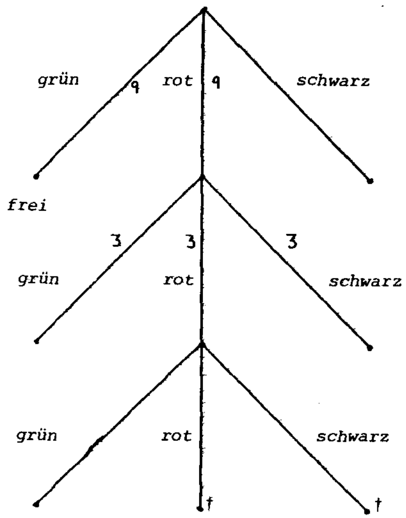
Färbe die Tunnels wie angegeben und färbe dann einen Würfel, so daß je zwei Seiten rot, schwarz und grün sind.



Drei Spieler erhalten je 9 Diebe (Spielmarken). Reihum geworfen zeigt der Würfel, welchen Tunnel der jeweilige Dieb nimmt. Wieviele Diebe überleben ? Die Spieler können den Weg ihrer Diebe folgendermaßen aufschreiben:

Dieb Nr. 1	Route	Länge des Weges	Frei	Tot
	schwarz rot schwarz	8 Tage		X

Nach Beendigung des Spiels können sie nun einen 'Baum' entwickeln, der die verschiedenen Versuchsausgänge zeigt:



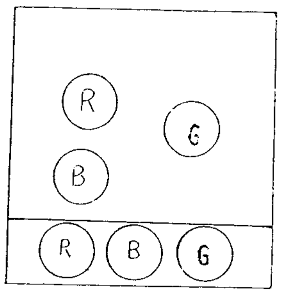
Dieser ist aus gutem Grund unvollständig, da wir niemals zu viel Hilfe oder Anleitung geben.

Viele Spiele, die die Kinder spielen, finden auf Rennbahnen oder Fußballfeldern statt. Dabei handelt es sich oft um 'gezinkte' Spiele.

Zwei Würfel werden geworfen: ich darf weiter, wenn ich die Summe von 1,2,3,4,10,11,12 erreiche, du darfst weiter bei 5,6,7,8,9. Kindern erscheint dieses Spiel von Anfang an ungerecht. Ich besitze größere Chancen, mich weiterzubewegen und trotzdem gewinne ich nie. Plötzlich fällt mir ein, daß man mit zwei Würfeln niemals die Summe 1 würfeln kann. Mir ist das natürlich bekannt, doch kommen die Kinder mit Einwänden, wenn das Spiel schon fortgeschritten ist.

Das Spiel wird nun berichtigt. Ich setze nun bei 2,3,4,5, 9,10,11,12. Dadurch werden meine Chancen zu gewinnen erhöht und ich habe offensichtlich die besseren Aussichten, oder nicht ? Zum Schluß versuchen wir, das Spiel ganz fair zu gestalten und einigen uns, daß ich bei ungerader Zahl weitergehen darf und du bei gerader Zahl. Das ergibt scheinbar ein wirklich faires Spiel. Aber warum erwies sich die andere Regel, so zurechtgebogen sie schien, gerade als genau gegenteilig bevorteilend ? Wir können dieses Problem nun numerisch untersuchen.

Was haben die Kinder daraus alles gelernt ? Nichts was man mit einem standardisierten Test messen könnte. Einen Teil des Baukastens haben wir noch nicht benutzt. Er besteht aus einer Schachtel mit zwei Fächern, in die man bunte Perlen legen kann. Diese Schachtel besteht aus durchsichtiger Plastik. Die im unteren Teil befindlichen Perlen lassen sich nicht verschieben, die anderen sind beweglich. Wie groß ist die Chance, daß nach dem Schütteln der Schachtel gleichartige Perlen nebeneinander liegen ?



Vor kurzem gab ich diese Aufgabe zwei Kindern, die schon einen Großteil der Wahrscheinlichkeitskarten durchgearbeitet hatten. Wie groß sind die Chancen, daß ein roter auf einen roten fällt, ein blauer auf einen blauen etc. ? Als Antwort erwartete ich nicht 3 ! Trotzdem bekam ich das, was ich wollte, nämlich eine kurze Bleistiftskizze sämtlicher möglicher Ausgänge, die Antwort 1/6 und dazu 10 Minuten Schütteln, um die Antwort experimentell nachzuprüfen. Experimentelle Resultate, Zeichnungen, 'Bäume' sind das wesentliche Ergebnis, das ich aus Vargas Arbeiten gewinne. Warum das alles, wenn von den Kindern in der Sekundarstufe lediglich die Beherrschung von vier Regeln verlangt wird ?

Mißt man es mit einer Skala, die die drei Grundforderungen Freude, Reinheit und Nutzen beinhalten, so ergeben sich durchweg gute Ergebnisse. Es macht sehr viel Freude, die Reinheit ist unanfechtbar und der Nutzen ? Die meisten unserer Schüler werden sich möglicherweise an Wettspielen beteiligen, jetzt tun sie es jedoch wenigstens mit Bewußtsein. Unsere Kinder werden Wahrscheinlichkeitssituationen mit Selbstsicherheit und Kompetenz angehen. Der Einblick, den sie entwickelt haben, ist sehr realistisch. Dies sind bleibende Ergebnisse, die der Mühe wert sind.

Wir sind keine Schule nur für Mathematik. Wir tanzen, singen, malen, schwimmen, campen etc. wie die Besten und Wahrscheinlichkeit ist nur ein geringer Teil unserer mathematischen Arbeit. Wir haben Spaß an der Wahrscheinlichkeitsrechnung genauso wie an Tanzen, Gymnastik und Schwimmen. Aus diesem guten Grund werden wir davon etwas behalten.