Fächer wie Wirtschaftskunde zu verbessern.

LITERATUR

1. O'Loughlin, M. The numbers game or beware of the anti-numerates. The Times, June 14th, 1978.
2. Wilkinson, R.K. Problem of External Assessment in Economics, in: Norman Lee (Ed.) Teaching Economics, Heinemann Educational Books, London (1975)
3. Wilkinson, R.K. Statistics in the School Curriculum. Trends in Education, Spring 1977.

ZWEI AUFGABEN MIT LÖSUNGEN ZUR STATISTIK DER SEKUNDARSTUFE II

G. Fillbrunn

Dieser Artikel stellt den ersten deutschen Originalbeitrag zu 'Stochastik in der Schule' dar und behandelt zwei Aufgaben zur mathematischen Stochastik der Oberstufe, die in jüngerer Zeit im Unterricht behandelt worden sind.

EINE AUFGABE ÜBER QUALITÄTSKONTROLLE

Ein Steinzeugbetrieb stellt Kacheln der Typen T_1, T_2 her. Bei der Produktion wird jede Kachel des Typs T_1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 1. Wahl und mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 2. Wahl. Jedes Stück vom Typ T_2 wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 1. Wahl und mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 2. Wahl. Die Tagesproduktion ist bei Typ T_2 um 10% geringer als bei Typ T_1.

**a) Eine Kachel wird zufällig aus der Menge der an einem Tag hergestellten Ware herausgegriffen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Kachel 1. Wahl?**

**b) Die Kacheln des Typs T_1 werden unsortiert zu Kleinpackungen der Art K_i zu je 3 Stück gebündelt, $i \in \{1,2\}$.
Je eine Kleinpackung der Art K_1 bzw. K_2 wird zufällig gewählt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man 2 Packungen, die gleichviel Kacheln der 1. Wahl enthalten?**

**c) Der Betrieb verkauft die Packung der Art K_1 für 13,80 DM.
Mit welchem Verkaufswert rechnet danach die Firma für eine Kachel der 1. Wahl des Typs T_1, wenn sie den Verkaufswert einer Kachel der 2. Wahl des Typs T_1 mit 4 DM ansetzt?**

**d) Jemand, der vom Typ T_1 200 Kacheln der 1. Wahl und 150 weitere Kacheln, die auch 2. Wahl sein können, benötigt, kauft 350 (unsortierte) Kacheln dieses Typs.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Käufer damit**

seinen Bedarf deckt?

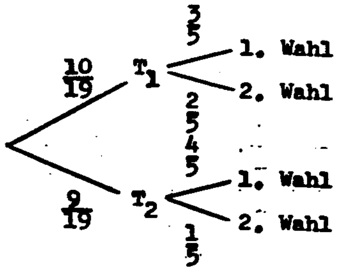
e) Um über den Erwartungswert μ_1 des Gewichts einer Kachel des Typs T_1 eine Aussage machen zu können, wird eine Stichprobe vom Umfang 200 gezogen. Dabei wird als Maßzahl des mittleren Gewichts 128,00 und als Maßzahl der zugehörigen empirischen Standardabweichung 5,00 erhalten.
Bestimme ein zugehöriges 0,95-Vertrauensintervall für den Erwartungswert μ_1.

f) Der Hersteller behauptet, daß die Maßzahl des Gewichts einer Kachel des Typs T_2 den Erwartungswert μ_2 mit $\mu_2 = 125$ hat. Eine Stichprobe vom Umfang 100 ergibt als Maßzahl für das durchschnittliche Gewicht 126,00 und als Maßzahl der zugehörigen empirischen Standardabweichung 4,00.
Kann mit dieser Stichprobe die Nullhypothese

$$H_0: \mu_2 = 125$$

auf dem Signifikanzniveau 0,01 zugunsten der Alternativhypothese $H_1: \mu_2 > 125$ verworfen werden?

<u>Lösung:</u> a) Die Wahl einer Kachel kann als ein zweistufiges Zufallsexperiment angesehen werden. In der 1. Stufe wird der Typ und in der 2. Stufe die Kachel dieses Typs gewählt.
Dem nebenstehenden Baumdiagramm entnehmen wir



$$p_a = \frac{10}{19}\cdot\frac{3}{5} + \frac{9}{19}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{30+36}{95} = \frac{66}{95} \approx 0{,}695$$

b) Ist p_{ij} die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Packung der Art K_i genau j Kacheln der 1. Wahl enthält, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{0,1,2,3\}$, dann gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_b

$$p_b = \sum_{j=0}^{3} p_{1j}\cdot p_{2j} \quad .$$

Aus $p_{1j} = \binom{3}{j}\cdot 0{,}6^j\cdot 0{,}4^{3-j}$, $p_{2j} = \binom{3}{j}\cdot 0{,}8^j\cdot 0{,}2^{3-j}$, $j \in \{0,1,2,3\}$,

ergibt sich
$$p_{10}\cdot p_{20} = 0{,}4^3\cdot 0{,}2^3 = 0{,}000512$$
$$p_{11}\cdot p_{21} = 3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^2\cdot 3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^2 = 0{,}027648$$
$$p_{12}\cdot p_{22} = 3\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4\cdot 3\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2 = 0{,}165888$$
$$p_{13}\cdot p_{23} = 0{,}6^3\cdot 0{,}8^3 = 0{,}110592$$

und damit

$$p_b = 0{,}30464 \quad .$$

c) Der Erwartungswert für die Zahl der Kacheln 1. Wahl, die in einer Packung der Art K_1 enthalten sind, ist $3\cdot 0{,}6$ (=1,8).
Der entsprechende Erwartungswert für die 2. Wahl ist 1,2. Ist a DM der Verkaufswert einer Kachel der 1. Wahl, dann gilt also

$$1{,}8\cdot a + 1{,}2\cdot 4 = 13{,}8$$
$$1{,}8\cdot a = 9$$
$$a = 5$$

Der gesuchte Verkaufswert ist 5 DM.

d) Die Zufallsvariable X soll die Zahl der Kacheln 1. Wahl angeben, die unter 350 Kacheln des Typs T_1 enthalten sind. Wegen $E(X) = 350\cdot 0{,}6 = 210$, $V(X) = 84$, ist

$$\frac{X-210}{\sqrt{84}}$$

ungefähr N(0;1)-verteilt. Für die uns interessierende Wahrscheinlichkeit p_d gilt

$$p_d = P(X > 200)$$
$$= P\left(\frac{X-210}{\sqrt{84}} > \frac{200-210}{\sqrt{84}}\right)$$
$$\approx P\left(\frac{X-210}{\sqrt{84}} \geq -1{,}0911\right)$$
$$\approx 0{,}8624$$

e) Wenn $\overline{Y}$ die Zufallsvariable für die Maßzahl des mittleren Gewichts einer Kachel des Typs T_1 bei einer Stichprobe vom Umfang 200 ist und S die Zufallsvariable für die zugehörige empirische Standardabweichung, dann kann

$$\sqrt{200}\cdot\frac{\overline{Y}-\mu_1}{S}$$

als näherungsweise N(0;1)-verteilt angesehen werden.
Die Ungleichungskette in

$$P(-1{,}960 \le \sqrt{200}\cdot\frac{\overline{Y}-\mu_1}{S} \le 1{,}960) \approx 0{,}95$$

formen wir um in

$$\overline{Y}-1{,}960\cdot\frac{S}{\sqrt{200}} \le \mu_1 \le \overline{Y}+1{,}960\cdot\frac{S}{\sqrt{200}} \quad .$$

Wir realisieren und erhalten das Vertrauensintervall

$$[128-1{,}960\cdot\frac{5}{\sqrt{200}}\,;\,128+1{,}960\cdot\frac{5}{\sqrt{200}}] \;,$$

also $$[127{,}31;128{,}69] \quad .$$

f) $\overline{Z}$ soll die Zufallsvariable für die Maßzahl des mittleren Gewichts einer Kachel des Typs T_2 bei einer Stichprobe vom Umfang 100 sein und S' die Zufallsvariable für die zugehörige empirische Standardabweichung. Gehen wir von $E(\overline{Z})=125$ aus, so ist

$$\sqrt{100}\cdot\frac{\overline{Z}-125}{S'} \quad (=10\cdot\frac{\overline{Z}-125}{S'})$$

näherungsweise N(0;1)-verteilt. Der Verwerfungsbereich ist daher durch

$$P(10\cdot\frac{\overline{Z}-125}{S'} > 2{,}326) \approx 0{,}01$$

gegeben.

Die Realisierung der Zufallvariablen $10\cdot\frac{\overline{Z}-125}{S'}$ ergibt $10\cdot\frac{126-125}{4}$ (=2,5). Die Nullhypothese wird also abgelehnt.

EINE AUFGABE ZUR PFLANZENZÜCHTUNG

In einer landwirtschaftlichen Versuchsanstalt werden neue Bohnensorten gezüchtet.

a) 200 Früchte der Sorte S_1 wurden auf die Zahl der in einer Frucht enthaltenen Samenkörner untersucht. Es ergab sich nachstehende Häufigkeitsverteilung:

Zahl der Samenkörner	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
abs. Häufigkeit der Früchte	1	0	8	19	24	31	58	40	16	3

a_1) Zeichne ein Stabdiagramm der Häufigkeitsverteilung. Verwende dabei die relativen Häufigkeiten.

a_2) Zeichne ein Schaubild der kumulativen Häufigkeitsverteilung. (Die kumulative Häufigkeitsverteilung ist die Funktion, die jedem x ($\in \mathbb{R}$) die Summe der relativen Häufigkeiten der Stichprobenwerte w zuordnet, für die $w \le x$ gilt.)

a_3) Berechne das arithmetische Mittel $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung $\overline{s}$ der Zahl der Samenkörner, die in einer Frucht enthalten sind.

a_4) Berechne die relative Häufigkeit der Stichprobenwerte, die außerhalb des Intervalls $]\overline{x}-2\overline{s};\overline{x}+2\overline{s}[$ liegen.

b) Von der Bohnensorte S_2 wurde festgestellt, daß 40% aller Früchte mindestens 7 Samenkörner haben, daß 58% aller Früchte mindestens 7 Samenkörner haben oder mindestens 12 cm lang sind und daß 35% aller Früchte mindestens 7 Samenkörner haben und mindestens 12 cm lang sind.
Eine Frucht der Sorte S_2 wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine mit einer Länge von mindestens 12 cm?

c) Zur Aussaat der Bohnen stehen die Beete $B_1,\ldots,B_7$ zur Verfügung.

c_1) Wieviel Möglichkeiten der Aussaat gibt es, wenn

I) jede der Sorten $S_1,\ldots,S_7$,

II) jede der Sorten S_1,S_2,S_3

auf genau ein Beet kommt und verschiedene Sorten auf verschiedene Beete gesät werden und im Falle II) die Sorten S_4, S_5, S_6, S_7 nicht zur Aussaat gelangen?

c_2) Wieviel Möglichkeiten der Aussaat gibt es, wenn nur die Sorte S_1 gesät werden soll und dazu 3 Beete benötigt werden?

d) d_1) Von der Sorte S_1 sind 90% der Samenkörner keimfähig. Wieviel Samenkörner müssen mindestens ausgesät werden, um mit der Mindestwahrscheinlichkeit 95% mindestens 7 Pflanzen zu erhalten? Erläutere den Gang der Lösung. (Verwende die Tafel der $B_{n;0,1}$- oder der $B_{n;0,9}$-Verteilungen.)

d_2) Von der Sorte S_2 weiß man, daß bei 20 Samenkörnern mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 ein oder mehrere Samenkörner nicht keimfähig sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Keimfähigkeit eines Samenkorns?

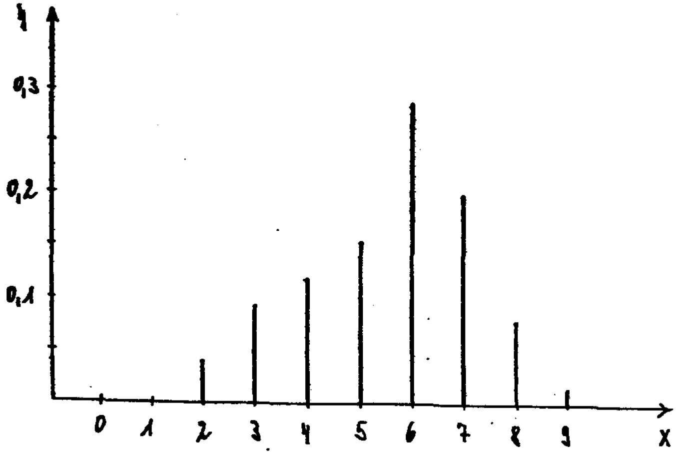
e) Es wird behauptet, daß die Wahrscheinlichkeit der Keimfähigkeit eines Samenkorns der Sorte S_3 0,8 beträgt. Diese Behauptung wird mit einer Stichprobe vom Umfang 100 auf dem 0,10-Signifikanzniveau getestet.

e_1) Es keimen 72 der 100 Samenkörner.
Kann damit die Behauptung widerlegt werden?

e_2) Berechne das Risiko 2. Art, wenn die Wahrscheinlichkeit der Keimfähigkeit eines Samenkorns tatsächlich 0,7 ist.

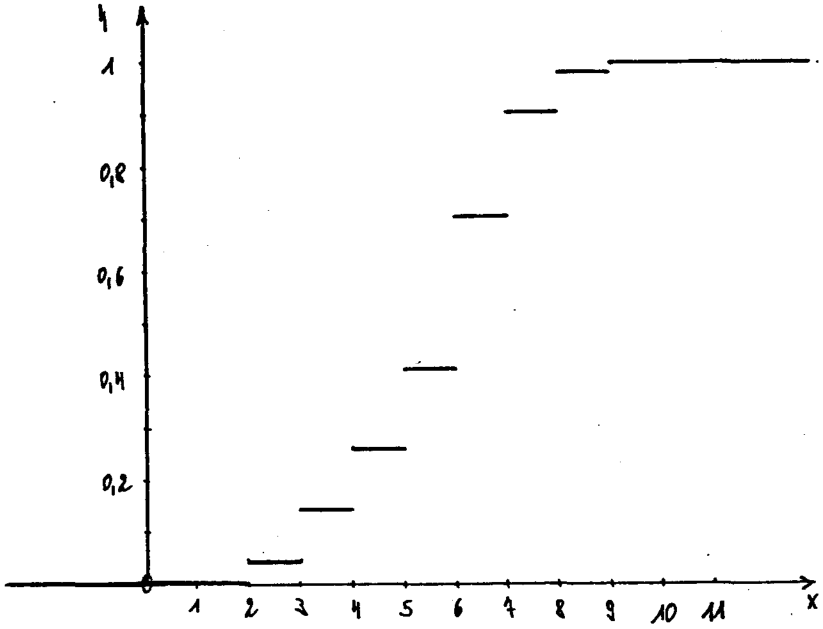
<u>Lösung:</u> a) a_1)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	0,005	0	0,04	0,095	0,12	0,155	0,29	0,2	0,08	0,015



a_2)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
rel. Summenhäufigkeit	0,005	0,005	0,045	0,140	0,260	0,415	0,705	0,905	0,985	1



a_3) $\bar{x} = \frac{0\cdot1+1\cdot0+2\cdot8+3\cdot19+4\cdot24+5\cdot31+6\cdot58+7\cdot40+8\cdot16+9\cdot3}{200}$

$= 5,535$

$\bar{s}^2 = \frac{0\cdot1+1\cdot0+4\cdot8+9\cdot19+16\cdot24+25\cdot31+36\cdot58+49\cdot40+64\cdot16+81\cdot3}{200} - 5,535^2$

$\approx 2,7488$

$\bar{s} \approx 1,6579$

a_4) Das zu betrachtende Intervall ist $]2,2192;8,8508[$. Außerhalb dieses Intervalls liegen 12 Stichprobenwerte. Deren Anteil ist $\frac{12}{200}$ $(=0,06)$.

b) Wir bezeichnen mit A das Ereignis 'Die Frucht hat mindestens 7 Samenkörner' und mit B das Ereignis 'Die Frucht hat mindestens die Länge 12 cm'. Es liegen dann folgende Wahrscheinlichkeiten vor:

$$P(A) = 0{,}4 \;,\; P(A \cup B) = 0{,}58 \;,\; P(A \cap B) = 0{,}35$$

Die Wahrscheinlichkeit P(B) gewinnen wir über die Gleichung

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) \quad :$$
$$P(B) = P(A \cup B)-P(A)+P(A \cap B)$$
$$P(B) = 0{,}58-0{,}4+0{,}35$$
$$= 0{,}53$$

c) c_1) I) $n_I = 7! = 5040$

II) $n_{II} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

c_2) $n = \binom{7}{3} = 35$

d) d_1) Aus der Tafel der $B_{n;0,9}$-Verteilungen ermitteln wir das kleinste n, für das gilt

$$\sum_{i=7}^{n} \binom{n}{i} \cdot 0{,}9^i \cdot 0{,}1^{n-i} \geq 0{,}95$$

Wir entnehmen n=10.

d_2) Ist p die Wahrscheinlichkeit der Keimfähigkeit eines Samenkorns, dann berechnet sich p aus

$$p^{20} = 0{,}5$$
$$p = \sqrt[20]{0{,}5} \approx 0{,}9659$$

e) e_1) Den Verwerfungsbereich $\{0,1,\ldots,72\} \cup \{87,88,\ldots,100\}$ des zweiseitigen Tests entnehmen wir der Tabelle der $B_{100;0,8}$-Verteilung. Da 72 im Verwerfungsbereich liegt, wird die Behauptung abgelehnt.

e_2) Das Risiko 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit β, mit der die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl sie falsch ist. β ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Bernoullikette der Länge 100 und der Trefferwahrscheinlichkeit 0,7 eine Trefferhäufigkeit erzielt wird, die im Annahmebereich $\{73,74,\ldots,86\}$ liegt. Laut Tabelle gilt

$$\beta \approx 0{,}9999-0{,}7036 = 0{,}2963$$

HABEN SIE DAS GELESEN ?

Übersetzt von Arnold a Campo

Unter dieser Überschrift stellen wir Ihnen lesenswerte Artikel aus anderen Zeitschriften vor, die Ihnen vielleicht entgangen sind.

1. Adi, H., Karplus, R., Lawson, A., and Pulos, S. Intellectual Development Beyond Elementary School VI. Correlational Resoning. School Science and Mathematics LXXVIII(8). December 1978, 675-83.

Dieser Artikel beschreibt zwei Aufgaben über Wechselbeziehungen, die mit 80 Schülern zwischen 13,7 und 19 Jahren, die noch keine theoretische Schulung hatten, behandelt wurden.

Die eine Frage beschäftigt sich mit dem möglichen kausalen Zusammenhang zwischen der Verabreichung eiens Medikaments und der Körpergröße bei Ratten, die andere mit der Möglichkeit des Zzsammenhangs zwischen der Schwanzfarbe und der Körpergröße von Ratten.

Vier Hauptkategorien möglicher Untersuchungsergebnisse wurden identifiziert und folgendermaßen gegliedert:

NR - (no response) kein expliziter quantitativer Vergleich zwischen den Zellen der Vierfeldertafel;

TC - die Zahl der Ergebnisse in 2 Zellen wird verglichen (two cells);

FC - (four cells) die Zahl der Ergebnisse in allen 4 Zellen wird verglichen;

CO - (correlation) die Wechselbeziehung wird durch einen quantitativen Vergleich unter Verwendung der vier Zellen beschrieben.

Die Autoren geben Beispiele typischer Beobachtungsergebnisse an und hieraus die Korrelationsrechnung mit Hilfe zweier anderer Begriffe zum entwickeln der Wahrscheinlichkeit und der Proportionalität.