EINE STIMULIERENDE SIMULATION

nach E. Goldstein, William Paterson College of New Jersey
Originaltitel in 'Teaching Statistics' Vol. 4 (1982)
Nr. 1: A Stimulating Simulation
Übersetzung: I.Strauß ; Bearbeitung: B.Wollring

Die Einführung in den Gebrauch von Histogrammen innerhalb der Statistik erscheint oft unter allen im Unterricht geläufigen mathematischen Gegenständen als einer der trokkensten und am wenigsten anregenden. Der folgende Beitrag benutzt Kenntnisse aus der elementaren Analysis und etwas Rechen- oder Programmiertechnik, um Schülern, denen diese Dinge grundsätzlich bekannt sind, gewisse kompliziertere Probleme aus der Statistik zugänglich zu machen. Dabei sollen sie in die Lage versetzt werden, das Problem nur mit Hilfe eines Tisch-Computers oder eines Taschenrechners oder auch nur mit einer Armbanduhr zu bewältigen, die eine Stoppuhr besitzt. Sie können so aus einfachen Regeln eine nichttriviale Wahrscheinlichkeitsdichte ermitteln, ganz im Gegensatz zur sonst üblichen Vorgehensweise in Statistik-Kursen. Folgt man diesem Vorschlag, so erhält man ferner durch Simulation eine Zufallsstichprobe, die auf dieser Verteilung basiert und zur Konstruktion eines Histogramms dient. Die Schüler sind immer wieder von der guten Approximation des Graphen zur Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ durch das aus den Simulationen gewonnene Histogramm beeindruckt.

Man betrachte ein Stück radioaktiven Materials als eine Population von Atomen mit unterschiedlicher Lebensdauer. $v(t)$ sei die Anzahl der Atome in dieser Population zum Zeitpunkt t. Für den Zerfall gelte die Annahme:

$$v'(t) = -K \cdot v(t) \quad \text{mit} \quad K > 0$$

Kennen die Schüler die Quotienten- und Kettenregel und die Ableitung der Exponentialfunktion, so finden sie als Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{v(t)}{v(0)} = e^{-K \cdot t}$$

Dabei ist $v(t)/v(0)$ der Anteil derjenigen Atome der Ausgangsmenge, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind. Die Gleichung besagt ebenfalls, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig ausgewähltes Atom zur Zeit noch nicht zerfallen ist, gleich $e^{-K \cdot t}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß seine Lebenszeit kleiner oder höchstens gleich t ist, beträgt daher:

$$P(X \leq t) = F(t) = 1 - e^{-K \cdot t}$$

Dabei beschreibt die Zufallsgröße X die Lebensdauer der Atome. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist somit:

$$f(t) = F'(t) = K \cdot e^{-K \cdot t}$$

Die Schüler sehen natürlich ein, daß es in der Praxis unmöglich ist, dieser Population von Atomen eine Zufallsstichprobe für Werte von X zu entnehmen. So wird sie die Möglichkeit interessieren, eine solche Stichprobe durch Simulation zu gewinnen. Diese Simulation beruht auf dem folgenden Lehrsatz aus der Statistik, dessen Beweis wir hier lediglich andeuten, obwohl er durchaus von Schülern zu bewältigen ist (siehe Bild 1):

> Satz: Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ und der Verteilungsfunktion $F(x)$, deren inverse Funktion $F^{-1}(y)$ sei. Ferner sei Y eine auf $[0; 1]$ gleichverteilte Zufallsgröße. Dann hat die Zufallsgröße $F^{-1}(Y)$ dieselbe Verteilungsfunktion wie X.

(Dies ist eine Abwandlung eines allgemeineren Theorems, siehe dazu HOGG und TANIS, Seite 115.)

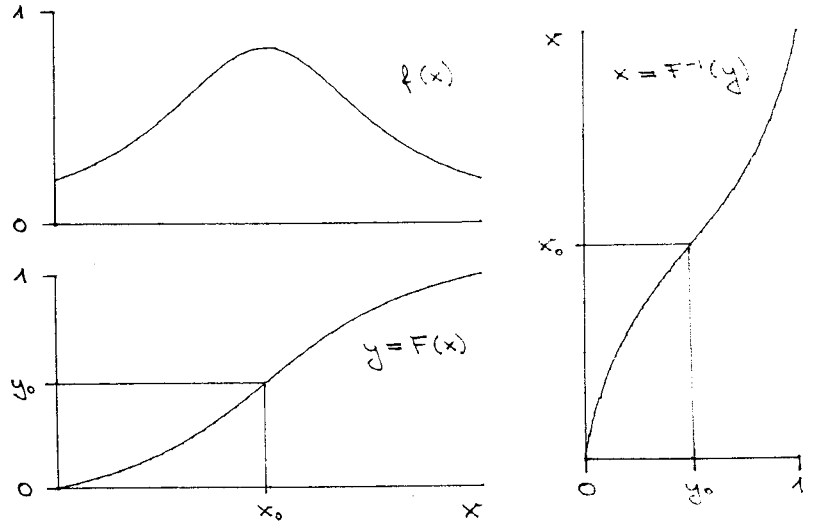

Bild 1: Beispiele für Graphen von $f(x)$, $F(x)$ und $F^{-1}(y)$

Wir geben die Beweisidee kurz an. Ist x ein beobachteter Wert von X und y ein beobachteter Wert von Y so ist zu zeigen, daß für jedes x_o die Gleichung $P(F^{-1}(y) \leq x_o) = P(x \leq x_o)$ gilt. Dies folgt so:

$P(F^{-1}(y) \leq x_o) = P(y \leq F(x_o))$ nach Def. von $F(x)$ und $F^{-1}(y)$

$= F(x_o)$, da Y gleichverteilt ist

$= P(x \leq x_o)$ nach Def. von $F(x)$

Dieser Satz gestattet es, eine Stichprobenentnahme aus einer nach X verteilten Population zu simulieren, indem man eine Stichprobe aus der Y-Verteilung entnimmt.

Betrachten wir als Beispiel den Spezialfall mit $K = 1$ und $f(x) = e^{-x}$. Um den Satz anwenden zu können, benötigen wir die Zufallsgröße $F^{-1}(Y)$. Wir lösen $y = F(x) = 1-e^{-x}$ nach x auf, ersetzen y durch Y und erhalten:

$$F^{-1}(Y) = -\ln(1-Y)$$

Im vorliegenden Falle können die Berechnungen dadurch vereinfacht werden, daß man $F^{-1}(Y) = -\ln Y$ betrachtet, da mit Y auch $1-Y$ auf [0; 1] gleichverteilt ist.

Weil Y nun eine auf [0; 1] gleichverteilte Zufallsgröße sein soll, erhält man mit jedem der folgenden Verfahren eine Zufallsstichprobe aus Werten von Y: Man kann Tabellen für Zufallszahlen (siehe z. B. ENGEL, Seite 154) oder Taschenrechnerverfahren (siehe z. B. WEISS) benutzen. Zwei weitere interessante Verfahren: Man kann die in vielen Mikrocomputern eingebaute Generatorfunktion für Zufallszahlen verwenden oder sogar eine der neuen aber nicht teuren Quarz-LCD-Armanduhren, mit denen man hundertstel Sekunden messen kann. Dabei bestimmt man die Stichprobenwerte, indem man die eingebaute Stoppuhr jeweils startet und anhält und den gebrochenen Anteil der angezeigten Sekunden notiert. Dieses Verfahren ist zur Herstellung von Zufallszahlen besonders effektiv.

Man arbeitet zweckmäßigerweise zu zweit: Einer erzeugt eine Zufallsstichprobe y_1, —, y_n aus Werten von Y, der andere bildet damit die simulierten Werte $x_1 = F^{-1}(y_1)$, —, $x_n = F^{-1}(y_n)$ von $F^{-1}(Y)$. Dann wird das Histogramm der absoluten Häufigkeiten mit der Klassenbreite 0.25 konstruiert. Ein solches Histogramm aus 100 simulierten Werten von $F^{-1}(Y)$ zeigt Bild 2 .

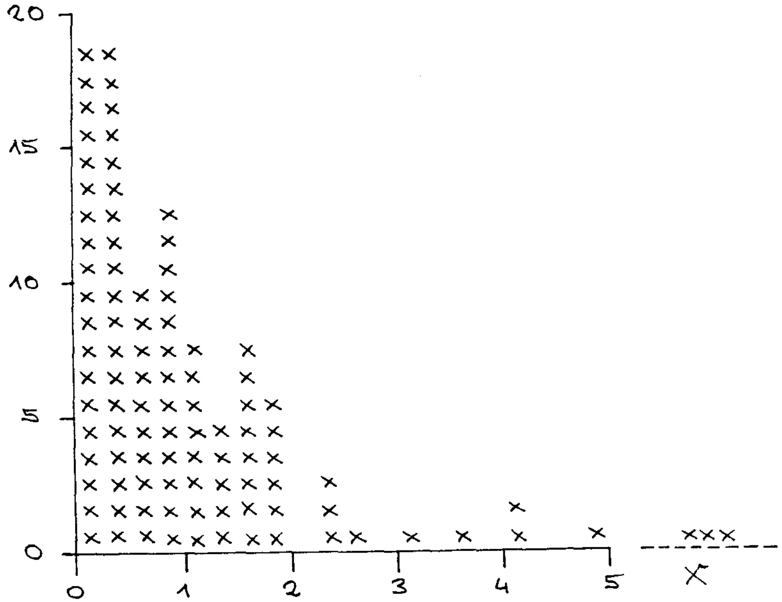

Bild 2: Histogramm einer simulierten Stichprobe aus
100 Werten von $F^{-1}(Y)$

Anschließend wird das Histogramm der relativen Häufigkeiten, jeweils dividiert durch die Klassenbreite 0.25, mit dem Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) verglichen (siehe Bild 3). Sollte die Ähnlichkeit nicht deutlich genug sein, ermutige man die Schüler zur Wiederholung mit größerem Stichprobenumfang. Das erbringt im allgemeinen zufriedenstellende Ergebnisse.

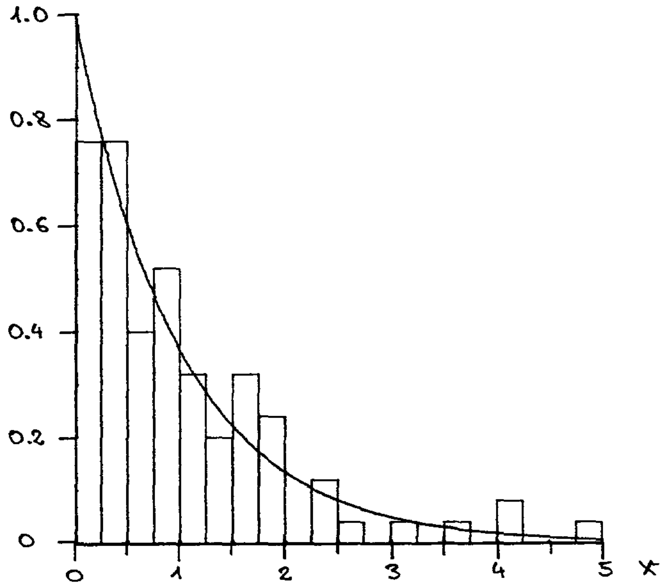

Bild 3: Vergleich des Histogramms mit dem Graphen zu f(x)

Als weitere Übung fordere man die Schüler auf, eine beliebige eigene Verteilungsdichte f(x) zu konstruieren und die gesamte Simulation damit zu wiederholen. Die einzige Beschränkung bei der Wahl von f(x) liegt, wie schnell erkannt wird, in der Forderung, daß man zu der Verteilungsfunktion F(x) die inverse Funktion $F^{-1}(y)$ bestimmen kann.

Literatur

ENGEL, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1. — Stuttgart: Klett 1973

GROGONO, P.: Programming in PASCAL. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1978

HOGG, V.; TANIS, E. A.: Probability and Statistical Interference. — Macmillan 1977

WEISS, J.: Zufallszahlen mit dem Taschenrechner. — MNU 3, 32 (1979), S. 133 - 143