DIE NICHT-STANDARD-ABWEICHUNG

nach Anna E. Hart, Liverpool Polytechnic

Originaltitel in "Teaching Statistics": The Non-Standard Deviation
Übersetzung: J. Feuerpfeil

Zusammenfassung: Die Grundidee der Standardabweichung stellt eine der ersten Schwierigkeiten dar, die dem Schüler in der Statistik begegnen können. Dieser Artikel ist ein Versuch, die Stellung der Standardabweichung in der historischen Entwicklung und mögliche Folgerungen für den Unterricht zu untersuchen.

Die meisten Statistikkurse in Schule und Hochschule beginnen mit der beschreibenden Statistik und führen im weiteren zur Berechnung einiger Stichprobengrößen. Zwar diktieren Lehrpläne nicht die Reihenfolge der Stoffbehandlung im Unterricht, wahrscheinlich ist ihr Einfluß doch nicht gering einzuschätzen. Daher wird sehr wahrscheinlich eine Formel für die Varianz (mit n oder n-1 als Nenner, wobei n der Stichprobenumfang ist) dargeboten als ein allgemeines Maß für die Streuung einer beliebigen Datenmenge, unabhängig von der Gestalt des Histogramms. Die verschiedenen möglichen Streuungsmaße können miteinander verglichen und bei verschiedenen Datenmengen gegenübergestellt werden, für jedes kann man eine intuitive Rechtfertigung angeben. Aber ein interessierter Schüler, der fragt, warum es besser ist, die Abweichungen vom Mittelwert zu quadrieren, anstatt den absoluten Betrag zu nehmen oder die Exponentialfunktion zu benützen, wird im Ungewissen gelassen. Analogien zum Trägkeitsmoment oder zum Satz von Pythagoras beantworten die Frage nicht zufriedenstellend.

Die Tabelle am Schluß des Beitrags gibt Einzelheiten einiger wichtiger Etappen in der Entwicklung der Streuungsparameter. Sie ist keineswegs vollständig, und die einzelnen Wissenschaftler waren nicht notwendig mit den Arbeiten der anderen vertraut. Dennoch ist es aufschlußreich zu sehen, auf welchen gedanklichen Wegen und in welchem Zusammenhang sich die verschiedenen Streuungsmaße entwickelten.

Der Begriff der Standardabweichung wurde von Pearson in Vorlesungen über "Die Gesetze des Zufalls" im Januar 1893 eingeführt, vorher wurden aber schon Begriffe wie "wahrscheinlicher Fehler" und "Standardfehler" im Zusammenhang mit Meßfehlern und dem Fehlergesetz benützt. Verschiedene Wissenschaftler hatten Verteilungen zum Fehlergesetz vorgeschlagen, im 18. und 19. Jahrhundert "bestätigten" Astronomen das Normalverteilungsgesetz. Letztere befaßten sich hauptsächlich mit Meßmethoden zur Positionsbestimmung von Himmelskörpern. Auch die Methode der kleinsten Quadrate leiteten sie her und sie wiesen auf allgemeine Streuungsmaße und andere Formeln für den wahrscheinlichen Fehler hin.

Einige Jahre später war die Anwendbarkeit der Normalverteilung auf andere Gebiete akzeptiert.

Eine mathematische Theorie wird nicht immer in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung gelehrt. Oft ist es vielmehr möglich, den Stoff in logischer Reihenfolge darzubieten. Dennoch ist es aufschlußreich zu erfahren, in welchem Zusammenhang und aus welchem Grund Ideen und Lehrsätze vorgeschlagen wurden. Zum Beispiel klingt es merkwürdig, eine Sache als "augenscheinlich klar" zu bezeichnen, wenn 50 Jahre zu ihrer Entwicklung notwendig waren. Es braucht zwar nicht unvernünftig zu sein, aber man tut doch gut daran, den Sachverhalt zu hinterfragen.

Hat sich eine Gesetzmäßigkeit in einem ganz bestimmten Zusammenhang ergeben und sich in der Folge als allgemeingültig erwiesen, dann sollte ihre Entwicklung auch einen unterrichtlichen Weg nahelegen. Dieser wird im folgenden für die Standardabweichung skizziert.

Die Idee der Standardabweichung hat ihren Ursprung im Fehlergesetz bei physikalischen Messungen und ist verknüpft mit der Normalverteilung. Im Schulunterricht kann die Einführung der Standardabweichung in natürlicher Weise mit der Diskussion von Gauß-Verteilungen (oder Histogrammen), also symmetrischen, eingifeligen Verteilungen verbunden werden. Bei solchen Verteilungen sind große Abweichungen vom Mittelwert wenig wahrscheinlich, kleine Abweichungen jedoch wesentlich wahrscheinlicher; negative und positive Abweichungen vom Mittelwert

sind gleich wahrscheinlich. Quadrieren der Abweichungen vom Mittelwert erhält die Symmetrie und stellt sicher, daß große Abweichungen für die globale Maßzahl ein größeres Gewicht erhalten als kleine Abweichungen. Für Intervalle von einer, zwei und drei Standardabweichungen vom Mittelwert läßt sich der Prozentsatz an Werten berechnen, die innerhalb dieser Intervalle liegen. Fragen der Meßgenauigkeit, wahrscheinliche und unwahrscheinliche Ergebnisse fügen sich in diesen Aufbau in natürlicher Weise ein. Hat sich das Vertrauen in das Konzept erst gefestigt, so können die Überlegungen auf andere z. B. zweigipfelige und schiefe Verteilungen übertragen werden. Dabei spielt die Standardabweichung zwar keine so natürliche Rolle, aber sie mißt noch immer die Ausbreitung des Histogramms und sagt etwas über seine Gestalt aus. Die Ungleichung von Tschabyschew kann für beliebige Verteilungen veranschaulicht werden, um aufzuzeigen, daß sich um den Mittelwert Intervalle zur Bestimmung des Prozentsatzes der Daten, die innerhalb dieser Intervalle liegen, konstruieren lassen.

Je nach Intensität des Kurses könnte dann die Diskussion auf die Betrachtung von S^2 und σ^2 ausgedehnt werden. σ^2 (oder σ) ist ein natürlicher Parameter der Normalverteilung. S^2 ist eine im allgemeinen "gute" Schätzgröße für σ^2.

Die Normalverteilung ist für sich schon von Wichtigkeit, doch der Zentrale Grenzwertsatz zeigt, daß wir die Normalverteilung auch dann benützen können, wenn wir große Stichproben ziehen, obwohl ursprünglich keine Normalverteilung vorliegt.

Die vorliegenden Denkansätze sind kein automatischer Weg zum Erfolg, und für den, der das Gebiet für problematisch hält, mögen sie provozierend wirken. Falls es so ist, ist der Zweck erfüllt, da Reflexion und Diskussion die Art der Darbietung im Unterricht nur verbessern kann.

Ungefähre Zeit	Name	Ergebnisse
1600	Galilei	Beschreibt Fehlerverteilungen als symmetrisch mit weniger wahrscheinlichen großen als kleinen Fehlern.
1720	de Moivre	Leitet die Normalverteilung her (aus der Binomialverteilung). Bestimmt das Maximum der Fehlerkurve.
1755	Simpson	Beschäftigt sich mit zwei diskreten Verteilungen zum Fehlergesetz (Rechtecks- und Dreiecksverteilungen).
1780	Daniel Bernoulli	Schlägt eine zirkulare Verteilung für das Fehlergesetz vor. Beginnt mit der Arbeit über die kleinsten Quadrate.
1780	Laplace	Leitet das Fehlergesetz her (Normalverteilung).
1805	Legendre	Veröffentlicht die Methode der kleinsten Quadrate, jedoch ohne Beweis.
1810	Adrain	Beweist das Fehlergesetz (Normalverteilung). Gibt das Prinzip der kleinsten Quadrate an.
1810	Gauß	Leitet das Fehlergesetz her, definiert h (= $1/\sigma\sqrt{2}$) als ein Genauigkeitsmaß, spricht das Prinzip der kleinsten Quadrate aus, stellt fest, daß die Standardabweichung eines Mittelwerts die Standardabweichung der Verteilung dividiert durch die Wurzel aus der Anzahl der Fälle ist.
1815	Bessel	Benützt als Erster den Begriff "Wahrscheinlicher Fehler", und zwar im Zusammenhang mit Geodäsie, Astronomie und Ballistik.

Ungefähre Zeit	Name	Ergebnisse
1815	Gauß	Greift den Begriff "Wahrscheinlicher Fehler" auf. Veröffentlicht Tabellen mit Wahrscheinlichkeiten von Fehlern, die um mehr als bestimmte Beträge vom Mittelwert abweichen. Die Abweichungen sind durch $\sigma / \sqrt{2}$ oder den wahrscheinlichen Fehler ausgedrückt. Gibt den wahrscheinlichen Fehler eines Moments an und benützt die mittlere Abweichung als alternatives Streuungsmaß.
1820	Laplace	Beweist das Normalverteilungsgesetz und die Methode der kleinsten Quadrate.
1825	Gauß	Entdeckt die Ungleichung $P(\lvert X-\mu\rvert \geq \lambda\sigma) \leq \begin{cases} 1-\lambda/\sqrt{3} & (\lambda \leq 2/\sqrt{3}) \\ 4/(9\lambda) & (\lambda \geq 2/\sqrt{3}) \end{cases}$ für jede bezüglich des einzigen Modus symmetrische stetige Verteilung. Veröffentlicht eine Arbeit über lineare Modelle.
1830	Encke	Beschäftigt sich mit den kleinsten Quadraten. Leitet verschiedene Standardfehler und wahrscheinliche Fehler her.
1840	de Morgan	Schlägt verschiedene Streuungsmaße vor, u. a. Durchschnittsmittel $\frac{\Sigma \text{ Abweichungen}}{N}$ durchschnittlicher Fehler $\frac{\Sigma \text{ numerische Werte der Abweichungen}}{N}$
1840	de Morgan	Benützt den Standardfehler des Mittelwerts.

Ungefähre Zeit	Name	Ergebnisse
1860	Airy	Benützt die Begriffe C = Modul ($C = \sigma / \sqrt{2}$) m. F. = mittlerer Fehler ($C/\sqrt{\pi}$) $C^2/2$ = mittleres Quadrat ($= \sigma^2$) m. q. F. = mittlerer quadratischer Fehler w. F. = wahrscheinlicher Fehler Setzt fest: m. q. F. einer Messung $= \frac{\text{Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler}}{N-1}$ m. q. F. eines Mittels $= \frac{\text{Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler}}{N\,(N-1)}$ w. F. des Mittels = 0,6745 x m. q. F.
1870	Tschebyschew	Veröffentlicht seine Ungleichungen über die Wahrscheinlichkeiten der Abweichungen vom Mittelwert.
1880	Helmert	Ableitung der Verteilung von $\Sigma (X - \bar{X})^2$.
1880	Galton	Wendet die Normalverteilung auf genetische Daten an.
1885	Edgeworth	Vergleicht Streuungsmaße bei verschiedenen Verteilungen. Beobachtet den Zentralen Grenzwertsatz.
1890	Galton	Gibt Anwendungen der Normalverteilung für Differenzen, Abweichungen, Streuungen usw., sowie für Fehler bei Experimenten an. Entwickelt Regression, Korrelation und bivariable Normalverteilung.

Ungefähre Zeit	Name	Ergebnisse
1895	Pearson	Beschäftigt sich mit Momenten und wahrscheinlichen Fehlern von Momenten. Stellt Analogien in der graphischen Statistik her.
1895	Pearson	Erster Gebrauch des Begriffs "Standardabweichung".
1900	Yule	Erster Gebrauch des Begriffs "Standardfehler".
1900	Pearson	Leitet die Standardabweichung mehrerer Zufallsgrößen her. Führt den χ^2-Test ein.
1905	Gosset (Student)	Formalisiert die Standardabweichung. Leitet die t-Verteilung her.
1920	Fisher	Erster Gebrauch des Begriffs "Varianz".

LITERATUR:

Kendall, M. G. and Placket, R. L. (1977).
Studies in the History of Statistics and Probability.
Vol. 2. Griffin, London.

Maistrov, L. E. (1974).
Probability Theory. A Historical Sketch.
Academic Press, New York.

Pearson, E. S. and Kendall, M. G. (1970).
Studies in the History of Statistics and Probability.
Griffin, London.

Todhunter, I. (1865).
History of the Theory of Probability.
Chelsea, London.

Walker, H. M. (1929).
Studies in the History of Statistical Method with Special Reference to
Certain Educational Problems.