2 | 1984

EIN ELEMENTARER ZUGANG ZUM ERWARTUNGSWERT

von PAUL N. DELAND & HARRIS S. SHULTZ
übersetzt von Eva Derwort

Der Begriff des Erwartungswertes ist intuitiv leicht zugänglich und hat auch in der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung eine dem Schüler verständliche Bedeutung. Die Schüler können allerdings mit diesem Begriff leider kaum umgehen, weil ihnen die zugehörigen Rechenverfahren meist nicht vertraut sind. Das Ausnutzen von Randbedingungen kann diesen Mangel beheben. Wir wollen hier einen elementaren, aber intuitiv interessanten und nützlichen Weg beschreiben, den Erwartungswert mit Hilfe von Randbedingungen zu bestimmen.

Die folgende Definition des Erwartungswertes ist für unsere Zwecke passend. Die reellen Zahlen c_1, c_2, c_3 c_4, ... seien die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes; p_k sei die Wahrscheinlichkeit für den Ausgang c_k. Dann ist der Erwartungswert für diesen Zufallsversuch

$$E = c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3+\dots$$

Der Erwartungswert eines Zufallsversuchs ist also das gewichtete Mittel aller möglichen Ausgänge, jeder Ausgang wird mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit gewichtet.

Als Beispiel wollen wir eine gute Münze werfen bis zum ersten Mal 'Zahl' erscheint.

Für die erwartete Anzahl Würfe gilt:

$$E = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Wegen $(1-x)^{-2} = nx^{n-1}$ $(|x| < 1)$

gilt mit $x = \frac{1}{2}$: $E = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2})^{-2} = 2$

Man kann dieses Problem auch ohne unendliche Summen angehen, wenn man ein mehr intuitives Argument verwendet, nämlich die Bedingungen für aufeinanderfolgende Würfe. Da 'Zahl' und 'Wappen' jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auftreten, werden wir - wenn wir den Versuch sehr oft durchführen - beim ersten Wurf in der Hälfte aller Fälle 'Zahl' erwarten und in der Hälfte aller Fälle 'Wappen'. wenn 'Zahl' beim ersten Wurf erscheint, ist das Spiel sofort beendet. Wenn 'Wappen' beim ersten Wurf erscheint, erwarten wir E+1 Würfe für das gesamte Spiel, da uns der erste Wurf unserem Ziel keines wegs näher gebracht hat (s.Fig.1).

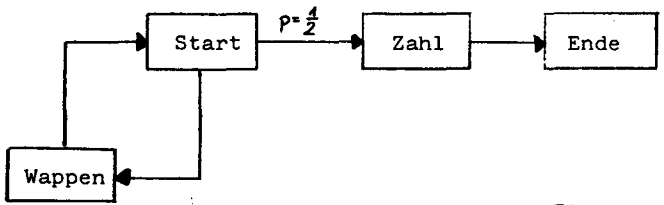

Fig. 1

Wenn das Spiel also zweimal gespielt wird, dann erwarten wir in einem Fall 'Zahl' beim ersten Wurf - also nur einen Wurf als Spieldauer - und in einem Fall 'Wappen' beim ersten Wurf und damit E+1 Würfe insgesamt.

Andererseits erwarten wir insgesamt 2E Würfe.

Daher gilt: $2E = 1 + (E + 1)$, also auch $E = 2$.

Bei einer allgemeineren Beschreibung dieses Verfahrens mit Verwendung von Randbedingungen verfolgen wir das gleiche Muster wie beim Beispiel des Münzwurfs.

Wir nehmen an, ein Zufallsversuch mit dem Erwartungswert E habe n gleichwahrscheinliche Ausgänge. Dann ist sicher bei n Durchführungen des Versuchs die Gesamterwartung nE.

Wir wollen voraussetzen, daß der Versuch bei n-facher Wiederholung mit jedem der n Ausgänge genau einmal beginnt (bei langen Versuchsreihen ist dies im Mittel vernünftig).

Dann gilt: $nE = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$

wobei E_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ der Erwartungswert unter der Voraussetzung ist, daß der Versuch mit dem i-ten Ausgang beginnt. Die Wirksamkeit unseres Verfahrens liegt in der - zumindest intuitiven - Verfügbarkeit der bedingten Erwartungswerte E_i. Diese bedingten Erwartungswerte können häufig in Relation zu E gesetzt werden, und damit wird eine einfache algebraische Lösung wie beim vorangehenden Beispiel des Münzwurfs ermöglicht.

Wir wollen das folgende Gefängnis-Problem betrachten. Ein Gefangener sitze in einer Zelle mit drei Türen. Wenn er durch die erste Tür tritt, so gelangt er sofort in die Freiheit, die zweite Tür führt ihn über einen Irrweg von 20 Tagen zurück in seine Zelle. Wenn er durch die dritte Tür geht, so wird er 40 Tage herumirren und dann in seine Zelle zurückkehren. Der Gefangene soll jede Tür mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählen und sich nicht erinnern, welche Tür er beim letzten Mal gewählt hat.

Nach wie vielen Tagen kann der Gefangene die Freiheit erwarten?

Da jede Tür mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewählt wird können wir erwarten, daß bei drei Versuchen jede Tür genau einmal als erste gewählt wird (s.Fig. 2).

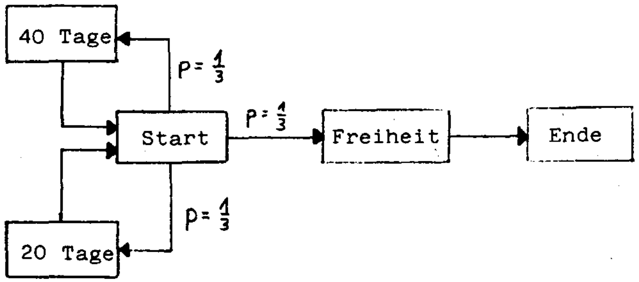

Fig. 2

Wird die erste Tür gewählt, so beträgt der Erwartungswert null Tage; bei Wahl der zweiten Tür beträgt er E+20 Tage und bei Wahl der dritten Tür E+40 Tage.

Mit den vorangehenden Bezeichnungen gilt: $n=3$, $E_1=0$, $E_2=E+20$ und $E_3=E+40$.

Also gilt: $3E = 0 + (E + 20) + (E + 40)$

und damit $E = 60$.

Das beschriebene Verfahren kann für einige Situationen mit nicht gleichwahrscheinlichen Ausgängen modifiziert werden.

Als Beispiel wollen wir noch einmal das Münzwurfproblem (Werfen bis zum erstenmal 'Zahl') betrachten. Aber wir wollen jetzt voraussetzen, daß es sich um eine schlechte Münze handelt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ für 'Zahl' und der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ für 'Wappen' (s. Fig. 3).

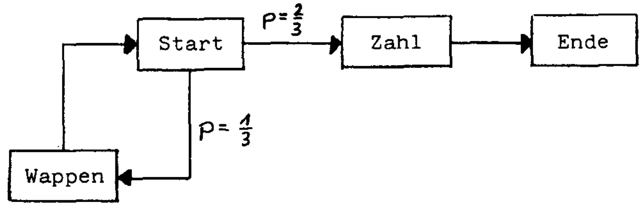

Fig. 3

Der Versuch soll dreimal durchgeführt werden. Wir können dann die drei ersten Ausgänge 'Zahl', 'Zahl' und 'Wappen' als gleichwahrscheinlich betrachten und wie zuvor verfahren.

Dann haben wir $E_1 = E_2 = 1$ und $E_3 = E + 1$, also

$3E = 1 + 1 + (E + 1)$ oder $E = \frac{3}{2}$.

Die hier beschriebenen Verfahren sind auch bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten nützlich. Da Wahrscheinlichkeiten auch als Erwartungswerte betrachtet werden können (die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ausgangs in einem Versuch ist die erwartete relative Häufigkeit dieses Ausgangs bei einer großen Anzahl von Versuchsdurchführungen), müssen die erarbeiteten Techniken nur auf einen Sonderfall angewendet werden.

Als Beispiel betrachten wir noch einmal den Gefangenen in der Zelle mit drei Türen. Wie zuvor soll eine Tür direkt in die Freiheit führen. Aber jetzt führt nur eine der beiden anderen Türen auf einem Irrweg schließlich wieder in die Zelle zurück. Die dritte Tür führt jetzt in die Todeszelle, in der der Gefangene hingerichtet werden soll. Wir wollen wieder voraussetzen, daß der Gefangene kein Erinnerungsvermögen hat und jede Tür zufällig wählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erlangt der Gefangene die Freiheit?

Die übliche Rechnung mit Hilfe unendlicher Summen ergibt:

$$p = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \quad = \frac{1}{2}$$

Wir können auch folgendermaßen argumentieren: Wenn dreimal eine Tür gewählt wird, dann können wir erwarten, daß jede Tür einmal gewählt wird (s. Fig. 4).

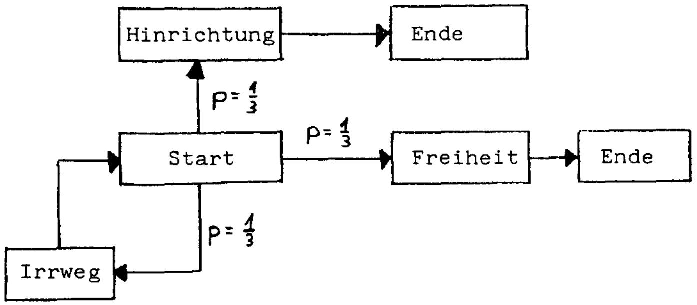

Fig. 4

Die Erfolgswahrscheinlichkeit (Anzahl der Erfolge) beträgt 1 bei Wahl der ersten Tür und 0 bei Wahl der dritten Tür. Bei der Tür, die in den Irrweg führt, beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit p, da der Gefangene nach dem Irrweg wieder mit der Ausgangssituation konfrontiert ist. Als Anzahl der Erfolge erwarten wir bei drei Versuchen dann 3p, also gilt $3p = 1 + p + 0$, d.h. wieder $p = \frac{1}{2}$. Die hier dargestellten Verfahren, stochastische Probleme über Randbedingungen mit Hilfe von linearen Gleichungen zu lösen, werden u.E. zu Unrecht im elementaren Unterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung vermieden. Auch in Lehrbüchern werden diese Verfahren kaum erwähnt. Wir meinen aber,

daß eine solche Darstellung für alle Schüler zugänglich ist und mit ihren Bezeichnungen und Begriffen in die übliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung integriert werden kann.

Anhang:

Hier sind einige zusätzliche Aufgaben zusammengestellt, zu deren Lösung sich die beschriebenen Verfahren gut nutzen lassen.

1. Ein Würfel soll geworfen werden bis "1" erscheint. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl Würfe.
2. Bei einem Tennisspiel bestehe Gleichstand und jeder Spieler gewinne mit der gleichen Wahrscheinlichkeit einen Punkt. Der Gewinner muß zwei Punkte Vorsprung haben.
   Bestimmen Sie die Anzahl der Spiele, die noch zu spielen sind.
3. Beantworten Sie 2., wenn Spieler A mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ einen Punkt erhält und Spieler B mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.
4. Eine gute Münze wird geworfen, bis zweimal hintereinander Zahl erscheint.
   Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Würfe.
5. Versuchen Sie 4. für das Ereignis dreimal hintereinander Zahl zu werfen.
6. Berechnen Sie bei 3. die Wahrscheinlichkeit, daß A gewinnt.
7. Man betrachte eine Serie von Münzwürfen, die enden soll, wenn entweder zweimal hintereinander 'Zahl' oder zweimal hintereinander 'Wappen' erscheint. Im ersten Fall gewinnt Spieler A, im zweiten verliert er. Die Münze sei gefälscht, so daß 'Zahl' bei jedem Wurf mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ erscheint. Be-

rechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von A. Überlegen Sie sich anschließend das gleiche Problem, wenn dreimal hintereinander 'Zahl' bzw. 'Wappen' erscheinen soll.

Lösungen:

1. 6	2. 4	3. 3,6	4. 6
5. 14	6. $\frac{4}{5}$	7. $\frac{16}{21}$; $\frac{104}{123}$	

Originaltitel in 'Teaching Statistics'
Vol. 6 (1984) Nr. 1
An Elementary Approach to Conditioning Arguments

Literaturhinweis für deutsche Lehrer

Ähnliche Probleme werden mit Hilfe der sogenannten Mittelwertregeln im Buch

ENGEL, A. (1974): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Klett-Verlag

behandelt.