

GK-Aufgabe

Eine schriftliche Prüfung besteht aus drei Aufgabenteilen A, B, C mit je vier Fragen. Alle zwölf Fragen können unabhängig voneinander beantwortet werden. Die Wahrscheinlichkeit für die richtige Beantwortung einer Frage aus Teil A ist a , aus Teil B ist b und aus Teil C ist c . Zum Bestehen der Prüfung ist die richtige Beantwortung von mindestens drei Fragen aus jedem Aufgabenteil erforderlich.

- a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die richtige Beantwortung aller zwölf Fragen.
- b) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Prüfung ist $w = (abc)^3 (4-3a) (4-3b) (4-3c)$
- c) Spezialisiere w für den Fall, daß alle zwölf Fragen mit jeweils derselben Wahrscheinlichkeit p richtig zu beantworten sind.
- d) Beurteile rechnerisch, in welchem der beiden folgenden Fälle ein Kandidat die größere Chance hat, die Prüfung zu bestehen:

Fall I: Alle zwölf Fragen sind mit jeweils 80 %iger Wahrscheinlichkeit richtig zu beantworten.

Fall II: Eine Frage aus Teil A ist mit je 70 %iger, aus Teil B mit je 80 %iger und aus Teil C mit je 90 %iger Wahrscheinlichkeit richtig zu beantworten.

Autor: StR Wolfgang Göbels, In den Wiesen 9, 5060 Berg.-Gladbach 2

Schulbuch: 2

GK-Aufgabe

Ein Betrieb stellt Staubsauger der Typen T_1 , T_2 , T_3 her.

a) Bei der Serienproduktion der Geräte des Typs T_1 treten unabhängig voneinander die Fehler F_1 und F_2 auf. F_1 , F_2 kommen mit den Wahrscheinlichkeiten 0,05 und 0,02 vor. Andere Fehler treten beim Typ T_1 nicht auf.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei zufälliger Wahl eines Staubsaugers vom Typ T_1 ein Gerät erhält, das

- a₁) beide Fehler,
- a₂) mindestens einen Fehler,
- a₃) genau einen Fehler,
- a₄) keinen Fehler hat?

b) Bei der Produktion sind Staubsauger des Typs T_3 mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 defekt.

b₁) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei zufälliger Wahl von 20 Geräten des Typs T_3 höchstens 2 defekte erhält!

b₂) Der Hersteller garantiert seinen Großhandelsabnehmern, daß mindestens 90 % der Staubsauger des Typs T_3 einwandfrei sind. Ein Kunde möchte 100 Geräte des Typs T_3 . Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, daß die Lieferung der Garantie entspricht!

b₃) Der Hersteller trifft mit einem Großabnehmer von Staubsaugern des Typs T_3 folgende Abnahmevereinbarung:

Zuerst wird eine Stichprobe vom Umfang 10 gezogen. Sind darunter mindestens 2 defekte Stücke, wird die Ware abgelehnt. Im

anderen Fall wird eine 10 Geräte umfassende 2. Stichprobe entnommen. Werden bei der 1. und 2. Stichprobe zusammen mindestens 3 defekte Geräte gefunden, wird die Ware abgelehnt. Ansonsten wird die Ware angenommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine (mindestens 20 Staubsauger enthaltende) Sendung angenommen wird?

(Tip: Baumdiagramm)

c) Um die defekten Staubsauger des Typs T_3 (vgl. b) vor dem Verkauf auszusondern, werden alle Geräte dieses Typs überprüft.

Bei der Kontrolle kommt es bei den intakten Geräten mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 und bei den defekten Geräten mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 zu einer falschen Entscheidung.

c₁) Beschreiben Sie für diesen Fall Fehler 1. und 2. Art!

c₂) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Wahl eines kontrollierten Staubsaugers ein Gerät zu erhalten, bei dem es zu einer falschen Entscheidung gekommen ist?

c₃) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zahl der Staubsauger, die von 10 000 Geräten nach der Kontrolle für den Verkauf freigegeben werden!

d) Aufgrund langjähriger Erfahrung ist bekannt, daß sich 20 % der Käufer eines Staubsaugers für eines der Geräte T_1 , T_2 , T_3 entscheiden. Dem Hersteller ist dieser Marktanteil zu gering. Er macht daher eine Werbekampagne. Nach Abschluß der Kampagne werden 100 Käufer befragt. 25 Personen antworten, daß sie sich für eines der Geräte T_1 , T_2 , T_3 entschieden haben.

Kann aufgrund dieser Stichprobe die Behauptung verworfen werden,

daß die Werbung unwirksam war?

Autor: StR' U. Hein, Nathan-Kahn-Straße 4, 5000 Köln 80

Schulbuch: 11

GK-Aufgabe

Nach einer Wahlprognose für die Präsidentschaftswahl in Frankreich 1974 sollten auf den Kandidaten Valéry Giscard d Estaing 52 % und auf den Kandidaten Francois Mitterand 48 % der Wählerstimmen im zweiten Wahlgang entfallen. Der Wahlprognose lag eine repräsentative Umfrage unter 2000 Wählern zugrunde.

- Bestimmen Sie das 95,5 %-Konfidenzintervall für p und entscheiden Sie damit, ob der Kandidat Giscard aufgrund dieser Umfrage mit der absoluten Mehrheit rechnen konnte.
- Wieviele Wähler hätten - bei gleichem Ergebnis der Umfrage - befragt werden müssen, damit der Kandidat Giscard sogar bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,7 % sich seines Wahlsiegs sicher sein konnte?

Das Ergebnis der Wahl lautete: Giscard 50,8 % , Mitterand 49,2 %.

- Überprüfen Sie die Qualität des Umfrageergebnisses.

Autor: OStR W. Knoch, Schiffarther Str. 41, 5204 Lohmar 21

Schulbuch: 11

GK-Aufgabe

Jeweils 500 g Teig enthalten n Rosinen. Nach sorgfältigem Durchkneten wird er in 50 g-Stücke zerlegt. Aus diesen Stücken werden Brötchen gebacken.

- Die Katzen Mieze und Mauz, die eine feine Nase für Rosinen haben, sind in die gerade vom Bäcker verlassene Backstube eingedrungen und suchen sich Brötchen heraus, um an die Rosinen zu gelangen. Bis der Bäcker zurückkehrt, findet Mieze in 6 von 8 Brötchen Rosinen, in den restlichen beiden keine. Mauz findet in genau 5 von 12 Brötchen Rosinen. Hat Mieze eine feinere Nase für Rosinen als Mauz?

Formulieren Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1 , führen Sie einen Vierfeldertest durch und formulieren Sie das Ergebnis zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$!

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangen 2 bestimmte Rosinen aus dem 500 g Teig in verschiedene Brötchen?
- Wieviele Rosinen muß man 500 g Teig zusetzen, damit man in einem zufällig herausgegriffenen Brötchen 5 Rosinen erwarten kann? Wie groß ist dann die Standardabweichung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dann 4, 5 oder 6 Rosinen in dem Brötchen sein?
- Wieviele Rosinen muß man 500 g Teig zusetzen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einem Brötchen wenigstens eine Rosine befindet, größer als 99 % wird?

Autor: H.-Joachim Ludwig, Scheffer-Boichorst-Str. 7, 4400 Münster

f) Notieren Sie die Anzahl der Stopps und das erreichte Ziel!

Kreuzen Sie die Felder an, auf die Sie ziehen!

(Sollten Sie Teil a) und b) nicht lösen können, versuchen Sie, c; d; e und f mit dem Musterexperiment "Zweimaliges Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" zu bearbeiten!)

Autor: Heinrich Schäferskupper, Veltmanns Weg
4420 Coesfeld

GK-Aufgabe

Ein Verlag beabsichtigt, eine neue Zeitschrift auf den Markt zu bringen. Der Verkauf ist aber nur rentabel, wenn sich mehr als 10 % der als Zielgruppe vorgesehenen Jugendlichen des Verkaufsgebietes für den regelmäßigen Bezug entscheiden. Es sollen die Hypothesen

$$H_0 : p \leq 0,1 \quad H_1 : p > 0,1$$

getestet werden, indem einer Anzahl von Jugendlichen ein Probeexemplar ausgehändigt wird, zu dem sie Stellung beziehen sollen.

a) Begründen Sie die Aufstellung dieser Hypothesen.

Notieren Sie das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit hierbei mit p bezeichnet wird.

- b) 50 Jugendliche werden befragt. Konstruieren und erläutern Sie eine Entscheidungsregel zum Irrtumsniveau $\alpha = 0,05$ und stellen Sie eine Wertetabelle für die Gütefunktion auf. Ermitteln Sie anhand der Gütefunktion, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_0 "akzeptiert" wird, obwohl $p = 0,3$ beträgt. Entschließt sich die Verlagsleitung zur Produktion und zum Verkauf der Zeitschrift, wenn sich 9 oder 50 Jugendlichen für den Bezug der Zeitschrift aussprechen?
- c) Nur 4 von 14 Jugendlichen äußern sich bei einem Test zugunsten der Zeitschrift. Kann man H_1 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% als erwiesen betrachten? Wie muß diese Frage beantwortet werden, wenn man aus Versehen eine ablehnende Äußerung übersehen hat?
- d) Von 200 Jugendlichen geben 100 keinerlei Antwort, während 26 der übrigen die Zeitschrift beziehen würden. Werten Sie dies aus! (Irrtumsniveau $\alpha = 0,05$).

Autor: Reinhold Gottsheim, Langenacker 113, 4600 Dortmund 15

Schulbuch: 6

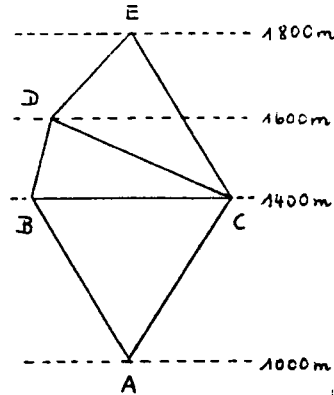
GK-Aufgabe

Ein Bergsteiger geht von der Bergstation A zum Gipfel eines Berges.

Der Gipfelpunkt sei E.

An den Weggabelungen A, B, C und D entscheidet er sich für das nächste Teilstück. Er geht keine Strecke, auf der er gekommen ist oder bei der er an Höhe verlieren würde.

Die möglichen Teilwege nimmt er mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Für die Strecke zwischen zwei benachbarten Punkten wird jeweils eine Stunde benötigt.



a) Zeichnen Sie das Baundiagramm für die möglichen Wege von A nach E und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten!

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Wanderer

b₁) am Punkt C

b₂) an den Punkten B und C

b₃) an den Punkten B oder C

vorbeikommt!

c) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Stunden an, die der Wanderer benötigt, um von A nach E zu gelangen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu $P(X=k)$ und zeichnen Sie ein Histogramm!

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Wanderer für den Aufstieg

d₁) höchstens drei Stunden

d₂) mindestens drei Stunden

d₃) mehr als drei Stunden

benötigt!

e) Beobachtungen haben ergeben, daß die Kapazität des zur Bergstation A führenden Sesselliftes in der Mittagszeit nur zu 40 % genutzt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß von fünf willkürlich ausgewählten Sitzen

e₁) zwei Sitze

e₂) mindestens zwei Sitze

besetzt sind.

f) Es werden nun n Sitze willkürlich ausgewählt ($n = 2$). Die Wahrscheinlichkeiten, daß bei n Sitzen genau ein Sitz bzw. genau zwei Sitze besetzt sind, werden mit $P_1(n)$ bzw. $P_2(n)$ bezeichnet.

f₁) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_1(n)$ bzw. $P_2(n)$ in Abhängigkeit von n an!

f₂) Bestimmen Sie die Zahl n, bei der die Wahrscheinlichkeiten $P_1(n)$ und $P_2(n)$ gleich groß sind!

Autor: OStR Herm.Jos. Dahmen, Reinaldstraße 21, 5350 Euskirchen

GK-Aufgabe

Eine Fabrik stellt Sicherungen her mit einer Ausschußquote von 10 %.

- 1.a) Als Lieferbedingung galt: Eine Sendung wird zurückgenommen, wenn sich in einer Stichprobe von 50 Stück mehr als 4 unbrauchbare Sicherungen befinden.
- Um die Prüfung der Lieferung zu vereinfachen, schlägt der Abnehmer vor, diese Lieferbedingung dahingehend abzuändern, daß eine Sendung zurückgenommen wird, wenn sich in einer Stichprobe von 25 Stück mehr als 2 unbrauchbare befinden.
- Wird die Fabrik auf diesen Vorschlag eingehen?
- (Hinweis: Die Stücke werden mit Zurücklegen entnommen).
- b) Wieviel defekte Sicherungen dürfen maximal in einer Stichprobe von 50 Stück enthalten sein, wenn die Lieferbedingung vorschreibt, daß höchstens 3 % der Sendungen zurückgenommen werden müssen?
2. Um einen Defekt einer Sicherung festzustellen, wird ein Prüfgerät entwickelt. Es stellt einen tatsächlichen Defekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 fest. Es zeigt jedoch auch einwandfreie Sicherungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 fälschlicherweise als defekt an. Die Ausschußquote sei weiterhin 10 %.
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Sicherung einwandfrei, wenn das Prüfgerät einen Defekt anzeigt?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Sicherung defekt, wenn das Prüfgerät sie als einwandfrei kennzeichnet?

c) Beurteilen Sie die Güte des Prüfgeräts.

3. Wieviele Sicherungen müssen mit Hilfe eines Prüfgerätes, das völlig fehlerfrei arbeitet, untersucht werden, wenn bei der Ausschußquote von 10 % mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit wenigstens ein defektes Stück erfaßt werden soll?

GK-Aufgabe

Eine Urne enthält 49 Kugeln mit den Nummern 1 bis 49. 6 davon sind rot, die restlichen 43 weiß. Es werden 6 Kugeln zufällig ohne Zurücklegen gezogen.

- 1.1 Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es, wenn die Reihenfolge der gezogenen Kugeln unwichtig ist?
- 1.2 Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der roten unter den gezogenen Kugeln an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ für $k = 3, 4, 5, 6$.
2. Im Zahlenlotto "6 aus 49" versucht man, 6 "richtige" Zahlen aus 49 zu tippen.
- 2.1 Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl $4,3 \cdot 10^{-7}$, 5 Richtige, aber ohne Zusatzzahl $1,802 \cdot 10^{-5}$ beträgt.

2.2 Wie groß ist die Gewinnchance überhaupt, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mindestens 3 Richtige bei Abgabe nur eines Tips?

2.3 In den Bestimmungen des Lottospiels ist festgelegt, daß 50 % der Einnahmen auszuzahlen sind. In den Gewinnrängen werden im Mittel die folgenden Beträge ausgezahlt:

1. Rang (6 Richtige)	525 000 DM
2. Rang (5 Richtige mit Zusatzzahl)	43 700 DM
3. Rang (5 Richtige ohne Zusatzzahl)	3 120 DM
4. Rang (4 Richtige)	58 DM
5. Rang (3 Richtige)	4,60 DM.

Der Einsatz pro Spiel beträgt 0,50 DM.

Prüfen Sie nach, ob der Auszahlungsmodus den Bestimmungen entspricht, indem Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei einem Tip berechnen. (Werte auf 4 Stellen nach dem Komma runden.)

3. Ein Lottospieler verfolgt die Strategie, immer diejenige Reihe zu tippen, welche zuletzt ausgespielt wurde. Hat er damit mehr Chancen als einer, der willkürlich ein beliebiges 6-tupel von Zahlen herausgreift?

GK-Aufgabe

Für ein Glücksspiel werden drei Urnen aufgestellt. Die 1. Urne enthält 3 weiße und eine schwarze, die 2. Urne eine weiße und eine schwarze und die 3. Urne zwei weiße Kugeln.

Der Spieleinsatz beträgt 1 DM. Aus der 1. Urne wird eine Kugel gezogen und in die 2. gelegt. Dann wird eine Kugel aus der 2. gezogen und in die 3. gelegt. Zuletzt entnimmt man der 3. Urne ebenfalls eine Kugel. Ist diese letzte Kugel schwarz, gewinnt man 7 DM.

a) Zeichnen Sie ein Baundiagramm für das gesamte Spiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Kugel schwarz? Ist das Spiel fair, welcher Gewinn / Verlust ist zu erwarten?

b) Die zuletzt gezogene Kugel ist weiß. "Ich wette, daß in der 3. Urne keine schwarze Kugel war", sagt daraufhin der Spieler. Wetten Sie dagegen?

Alle Kugeln werden mit zwei roten zusammen in eine Urne gelegt.

c) Entnimmt man dieser Urne gleichzeitig 3 Kugeln, so sind mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ mindestens 2 weiße Kugeln dabei. Warum?

d) Nach 30-maliger Durchführung dieses Versuchs stellt man fest, daß nur in 16 Fällen mindestens 2 weiße Kugeln gezogen wurden. Kann man dies zum Anlaß nehmen, die in c) ermittelte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ in Zweifel zu ziehen? Beantworten Sie diese Frage nach Angabe einer Durchführungs- und Entscheidungsvorschrift für einen zweiseitigen Test auf einem Signifikanzniveau von 5 %.

GK-Aufgabe

Bei einer psychologischen Untersuchung wurde in der Innenstadt von Hamburg das nebenstehende Schild mitten auf einem belebten Fußweg aufgestellt.



- a) In einem bestimmten Zeitabschnitt des ersten Untersuchungstages kamen 35 Personen vorüber, von denen 30 links am Schild vorbeigingen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß unter den ersten 5 Passanten dieses Zeitabschnitts mehr als 3 "Linksgänger" waren (exakt als "Versuch ohne Zurücklegen").

Zeigen Sie, daß - trotz des geringen Stichprobenumfangs - die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit noch der Binomialverteilung einen guten Näherungswert liefert.

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in dem in a) betrachteten Zeitabschnitt alle 5 "Rechtsgänger" unter den ersten 12 Passanten? (Exakte Lösung)
- c) Am ersten Untersuchungstag gingen 72 % der Passanten links an dem Schild vorbei. Prüfen Sie durch Berechnung eines 95,5 %-Konfidenzintervalls für p , ob das Versuchsergebnis "30 Linksgänger von 35 Passanten" aus a) als untypisch zu werten ist.
- d) Der Versuch wurde beendet, als 2000 Personen an dem Schild vorübergegangen waren. 77 % von ihnen waren "Linksgänger". Prüfen Sie durch Berechnung eines 95,5 %-Konfidenzintervalls für p , ob

die Darstellung in einem späteren Zeitungsbericht zutrifft, daß mehr als $\frac{3}{4}$ der Bevölkerung unter die "Linksgänger" zu zählen seien.

Autor: OStR Peter Krull, Am Hartlagerholz 11, 48 Bielefeld 1

Schulbuch: 11

GK-Aufgabe

- a) Mit Würfel A wurde bei 4 Würfungen keimale 6, mit Würfel B bei 300 Würfungen 43mal 6, mit Würfel C bei 500 Würfungen 92mal 6 gewürfelt. Welcher Würfel ist demnach am ehesten "verdächtig", kein L-Würfel zu sein?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt ein L-Würfel bei 4 Würfungen keimale 6?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt ein L-Würfel bei 300 Würfungen genau 43mal 6?
- e) Aus vielen Würfungen mit Würfel C ergab sich die relative Häufigkeit 0,45 für das Ereignis U: "Ungerade Augenzahl". Dieser Würfel wurde nun noch 500 mal geworfen. Wie groß muß die Zahl n mindestens sein, damit das Ereignis U zwischen 220 mal und n mal mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eintritt?

Autor: Klaus-Dieter Scharpff, Meisenhag 23, 4700 Hamm 5

GK-Aufgabe

Geheimagenten treten mit ihren Zentralen in der Regel durch verschlüsselte (codierte) Kurzbotschaften in Kontakt, wobei sich Verständigungsprobleme (z.B. durch Rauschen in der Leitung) nicht immer ganz vermeiden lassen.

Eine besonders wichtige Botschaft ist: "benötige Hilfe!" (bH).

Sie wird durchschnittlich in 10 % aller Fälle gesendet.

Codierungsspezialisten haben daher einen Code entwickelt, der folgende Eigenschaften besitzt:

Sendet der Agent "bH", so wird dies in 98 % aller Fälle von der Zentrale verstanden, in 2 % aller Fälle versteht sie etwas anderes.

Sendet der Agent eine andere Botschaft, so glaubt die Zentrale in 5 % aller Fälle "bH" zu verstehen. In 95 % aller Fälle versteht sie etwas anderes.

Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß

- a) der Agent keine Hilfe benötigt, obwohl die Zentrale "bH" verstanden hat;
- b) der Agent Hilfe benötigt, obwohl die Zentrale nicht "bH" verstanden hat.
- c) Beurteilen Sie die Güte des Codes.
- d) In der oben gestellten Aufgabe kommen bedingte Wahrscheinlichkeiten (also Wahrscheinlichkeiten, die in der Form $P_B(A)$ angegeben werden) vor.
Zeigen Sie anhand je eines konkreten Beispiels (anzugeben sind jeweils der Zufallsversuch und die Ereignisse A und B), daß jeder der drei Fälle

$$d_1) P(A) > P_B(A)$$

$$d_2) P(A) = P_B(A)$$

$$d_3) P(A) < P_B(A)$$

eintreten kann.

Autor: Ingo Klemisch, Dieselstr.5, 4800 Bielefeld 1

Schulbuch: 8

GK-Aufgabe

Während des Sektfrühstücks bei der Präsentation eines neuen Modells behauptet der Entwicklungsleiter der Firma "Zeta":

"Etwa 45 % aller deutschen Autofahrer würden unseren neuen "Zeta 3000 GTI" zum "Auto des Jahres 1984" wählen, wenn sie an der Wahl beteiligt würden!"

Angenommen, Sie sollen diese Behauptung an zweihundert Personen testen.

- a) Geben Sie Null- und Gegenhypothese an (dem Entwicklungsleiter soll mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit irrtümlicherweise Unrecht gegeben werden) und bestimmen Sie eine Entscheidungsregel, bei der die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler I. Art unter 5 % liegt.

b) Nehmen Sie nun an, die Entscheidungsregel würde lauten:

$$\text{Verwirf } H_0 \Leftrightarrow X \leq 80 \vee X \geq 100$$

b₁) Wie groß ist hier der Fehler 1. Art? Vergleichen Sie mit a) und erklären Sie den Unterschied.

b₂) Aufgrund der Testergebnisse werde H_0 nicht verworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies zu Unrecht, falls in Wirklichkeit 55 % aller Autofahrer den "Zeta 3000 GTI" wählen würden?

Die Behauptung des Entwicklungsleiters bleibt nicht unwidersprochen. Während der Chefdesigner (dem eine andere Karosserie vorgeschwebt hatte) für einen niedrigeren Prozentsatz wettet, meint der stolze Konzernherr: "Meiner Meinung nach würden 55 % bis 85 % den "Zeta 3000 GTI" wählen!"

Diese Behauptung soll nun an fünfzig Personen getestet werden.

c) Formulieren Sie die Nullhypothese und geben Sie die allgemeine Form der Entscheidungsregel an.

Bei welchen Werten von X wird man die Nullhypothese auf keinen Fall verwerfen?

d) Zeichnen Sie zur Entscheidungsregel: $\text{Verwirf } H_0 \Leftrightarrow X \leq 25 \vee X \geq 45$ den Graphen der Gütefunktion und tragen Sie die Bereiche für Fehler 1. bzw. 2. Art ein.

Wie groß ist der maximale Fehler 1. Art?

Autor: Ingo Klemisch, Dieselstraße 5, 4800 Bielefeld 1

Schulbuch: 8

GK-Aufgabe

In einer Befragung soll erfaßt werden, wie groß der Anteil der Personen ist, die ein bestimmtes Produkt kennen. Eine Stichprobe vom Umfang 100 wird durchgeführt. 59 Personen geben an, das Produkt zu kennen.

a) Bestimmen Sie ein 95,5 %-Konfidenzintervall für den Anteil p der Personen in der Gesamtheit, die dieses Produkt kennen?

Was beschreibt dieses Intervall?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man in einer Stichprobe vom Umfang 100 genau 59 Personen antreffen, wenn der wahre Anteil 60 % beträgt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man 59 oder mehr Personen antreffen, wenn der Anteil 50 % beträgt?

d) Ist es möglich, daß der Anteil der Personen, die das Produkt kennen, 70 % beträgt? Welche Wahrscheinlichkeit hat dann das Ereignis, in der Stichprobe vom Umfang 100 höchstens 59 Personen anzutreffen?

e) Wie groß hätte der Umfang der Stichprobe gewählt werden müssen, damit der Anteil p auf 3 % genau bestimmt worden wäre? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %).

f) Der Hersteller des Produkts will die Entscheidung über eine Werbekampagne vom Ergebnis der Stichprobe abhängig machen.

Beschreiben Sie Fehler 1. und 2. Art!

Autor: StD H.K. Strick, Pastor-Scheibler-Str. 10, 5090 Leverkusen 31

Schulbuch: 11

GK-Aufgabe

Ein regelmäßiges Tetraeder trägt auf seinen vier Seitenflächen die Zahlen 1; 2; 3 und 4. Nach jedem Wurf wird die Zahl auf der unten liegenden Fläche als "Augenzahl" notiert; Diese Augenzahl gilt als geworfen. Jede Augenzahl tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

- a) Das Tetraeder werde dreimal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- A. "Die Augenzahl ist jedesmal 1"
 - B. "Jede der Augenzahlen 1; 2; 3 erscheint genau einmal"
 - C. "Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich"
- b) Nun werde das Tetraeder zehnmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß
- b₁) keinmal,
 - b₂) genau viermal,
 - b₃) weniger als dreimal die Augenzahl 1 geworfen wird.

Man gebe jeweils einen exakten Term und einen Näherungswert (4 Stellen nach dem Komma) an.

- c) Wie oft muß das Tetraeder geworfen werden, damit mit 95,5 %iger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal eine 1 geworfen wird?
- d) Das Tetraeder wird jetzt 600mal geworfen. Man gebe ein Intervall an, in dem mit 95,5 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Würfe mit Augenzahl 1 liegt.
- e) Das Tetraeder wird bei einem Glücksspiel verwendet.

Spieler A wirft bei einem Einsatz von 1,50 DM das Tetraeder zweimal. Bei Augensumme "8" erhält er von Spieler B 8 DM, bei Augensumme "7" erhält er 4 DM und bei Augensumme "2" erhält er 6 DM ausgezahlt.

Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn oder Verlust pro Spiel für A? Wie müßte man die Auszahlung bei Augensumme "2" abändern, damit das Spiel fair wird?

- f) Jemand glaubt, daß die Augenzahl "1" bei einem bestimmten Tetraeder mit größerer Wahrscheinlichkeit als $\frac{1}{4}$ auftritt. Um seine Behauptung zu untermauern, wirft er das Tetraeder 100mal. und stellt die Anzahl k der Würfe mit Augenzahl 1 fest. Wie groß muß k sein, damit er mit einer statistischen Sicherheit von 95 % seine Behauptung aufrecht erhalten kann.
- Man erläutere hierbei, was die statistische Sicherheit von 95 % bedeutet.

Autor: Klaus Maß, Theodor-Heuss-Gymnasium, Theodor-Körner-Str. 25
4350 Recklinghausen

GK-Aufgabe

Bei einer Umfrage unter den 760 000 Mitgliedern einer europäischen Partei gaben von 2280 Befragten lediglich 205 Personen an, sie fühlten sich nicht in der Lage, einem bestimmten Konzept zur Bekämpfung der Arbeitslosigkeit (Wochen- bzw. Lebensarbeitszeitverkürzung, Teilzeitbeschäftigung o.ä.) eindeutig den Vorzug zu geben.

- a) Schätze auf dem Sicherheitsniveau $\eta = 98\%$ die Anzahl der unschlüssigen Parteimitglieder und beurteile die Ansicht, daß mehr als 90% der Partei hinsichtlich der Wahl der Mittel zur Bekämpfung der Arbeitslosigkeit eine feste Meinung habe.
Erläutere einleitend die mathematische Struktur der Sachlage.
- b) Ermittle die Signifikanzniveaus η , auf denen mit dem Umfrageergebnis die in a) formulierte Ansicht bestätigt werden kann.

Autor: Ulrich Vielhauer, Voßkuhle 30, 5790 Brilon

Schulbuch: 11

GK-Aufgabe

Bei den Prüfstellen des Technischen Überwachungs-Vereins (TÜV) werden Fahrzeuge überprüft, hat ein Fahrzeug keine oder nur unerhebliche Mängel, so erhält es eine Prüfplakette; sonst muß es wieder vorgeführt werden.

- a) Eine Stunde lang werden die Prüfer A und B beobachtet. Prüfer A vergibt an 10 von 12 untersuchten Autos eine Plakette, Prüfer B während der gleichen Zeit an 5 von 9 Fahrzeuge.
Ist Prüfer A großzügiger als Prüfer B? Führen Sie einen Vierfeldertest mit einem Signifikanzniveau von 10% durch.
- b) Die Fahrzeugprüfung besteht aus mehreren hintereinander durchgeführten Schritten. Die ersten drei sind Abgasmessung, Bremsentest und Karosseriekontrolle.

Von den vorgeführten Autos bekommen im Durchschnitt

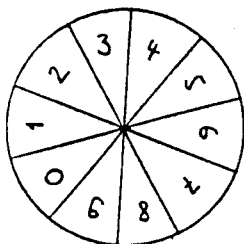
- 12% wegen zu hoher Abgaswerte
- 10% wegen mangelhafter Bremsanlage
- 15% wegen Schäden an der Karosserie

keine Prüfplakette.

1. Bei wieviel Prozent der Wagen werden weder Abgaswerte noch die Bremsanlage beanstandet?
2. Wieviel Prozent der Wagen bekommen wegen mindestens einer dieser drei Mängel keine Prüfplakette?
3. Wieviel Prozent der Wagen bekommen wegen genau zweier Mängel keine Prüfplakette?

GK-Aufgabe

Eine neue Lotterie - nennen wir sie wegen ihrer Ähnlichkeit zum Spiel 77 "Spiel 83" - soll aus der Taufe gehoben werden; Zu tippen ist die Zufallszahl, die sich ergibt, wenn das nebenstehende Glücksrad 5 mal hintereinander gedreht wird. Der Einsatz soll 1 DM betragen.



Bei diesem Glücksrad treten alle 10 Ziffern mit derselben Wahrscheinlichkeit auf.

Zwei Varianten des Spiel 83 stehen zur Zahl. Sie unterscheiden sich in der Verteilung der Gewinnchancen:

Variante A

Alle Ziffern richtig: 5000 DM

Die letzten vier Ziffern (und nur diese) richtig: 500 DM

Die letzten 3 Ziffern richtig: 50 DM

Die letzten beiden Ziffern richtig: 5 DM

Die letzte Ziffer richtig: 0,50 DM

Variante B

Alle Ziffern richtig: 5000 DM

Vier Ziffern (und nur vier) richtig: 500 DM

Drei Ziffern richtig: 50 DM

Zwei Ziffern richtig: 5 DM

Eine Ziffer richtig: 0,50 DM

- a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns in DM.
- b) Welche Version des Spiels 83 ist fair?
- c) Wie hoch muß der Einsatz mindestens sein, damit beide Versionen für den Veranstalter günstig sind? Warum muß der Einsatz bei Version B höher sein?
- d) Y sei die Anzahl der richtig getippten Ziffern. Zeigen Sie, daß Y binomial verteilt ist und berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von Y .

Autor: Dankwart Vogel, Bismarckstraße 1, 4800 Bielefeld

Schulbuch: 12

LK-Aufgabe

Auf einem Tetraeder sind die Zahlen 1, 3, 5, 7 auf den vier Seitenflächen angebracht.

- a) Spieler A tetraedert mit einem Laplace-Tetraeder, Spieler B würfelt mit einem normalen Laplace-Würfel. Sie vereinbaren folgende Spielregel miteinander:

Derjenige Spieler gewinnt, dessen Gerät die höhere Augenzahl aufweist.

Erscheint bei beiden dieselbe Augenzahl (Remis), so wird nochmals geworfen.

Ein Spiel endet erst dann, wenn entweder A oder B gewonnen hat.

Weisen Sie nach, daß beim ersten Wurf A mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ und B mit der Wahrscheinlichkeit $3/8$ gewinnt und daß das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $1/8$ nach dem ersten Wurf Remis steht.

- b) Es kann vorkommen, daß das Ereignis "Remis" mehrmals hintereinander eintritt. Die Zufallsvariable Z bezeichne die Anzahl der Würfe jedes Spielers, die bis zur Entscheidung eines Spiels nötig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z und zeigen Sie, daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist.

Nach wievielen Würfen ist das Spiel mit 99,9 %iger Sicherheit beendet?

- c) Zeigen Sie, daß A ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $4/7$ gewinnt.

Die beiden Spieler führen 140 Spiele durch. Wieviele Spiele wird A voraussichtlich gewinnen? Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Frage ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die gesuchte Anzahl mit 95 %iger Sicherheit liegt.

A gewinnt tatsächlich 94 Spiele. Kann man aus diesem Ergebnis schließen, daß sein Tetraeder gezinkt ist (Sicherheitswahrscheinlichkeit 99 %)?

Autor: StR Manfred Schneider, Hochkamp 1 a, 2859 Nordholz

Schulbuch: 6, 11

LK-Aufgabe

Eine Firma bezieht vom Lieferanten L_1 die Teile T_1 , vom Lieferanten L_2 die Teile T_2 und vom Lieferanten L_3 die Teile T_3 und setzt sie zu einem Staubsauger zusammen. Der Staubsauger funktioniert, wenn alle 3 Teile brauchbar sind. T_1 , T_2 und T_3 werden mit den Wahrscheinlichkeiten 0,02, 0,03 und 0,05 unbrauchbar angeliefert.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein so montierter Staubsauger funktionstüchtig?

Ein Staubsauger funktioniert nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

- nur T_3 unbrauchbar ist
- er genau ein unbrauchbares Teil enthält?

- b) Die Teile T_1 , T_2 und T_3 werden von den Herstellern in Kisten K_1 , K_2 und K_3 zu 40, 60 und 100 Stück geliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in K_2 genau 1 unbrauchbares Teil? Aus K_3 werden 20 Teile mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr als 2 unbrauchbare Teile? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Sendung von 5 Kisten K_1 höchstens 1 unbrauchbares Teile enthält?
- c) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Staubsauger länger als die Garantiezeit von 1 Jahr funktioniert, ist $p = 0,95$. Ein defekter Staubsauger wird in der Garantiezeit kostenlos ersetzt. Zu Weihnachten '82 wurden 800 funktionierende Staubsauger verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Zahl der Garantiefälle im Intervall $[35,45]$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden es mehr als 50 Garantiefälle?
- d) Der Lieferant L_3 behauptet, daß er durch die Anschaffung einer neuen Maschine den Anteil der Ausschußstücke an Teilen T_3 auf 2 % gesenkt habe. Um dies zu prüfen, entnimmt man seiner Produktion eine Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang 400. Bestimme den Ablehnungsbereich der Hypothese $H_0: p \leq 0,02$, wenn der Fehler 1. Art höchstens 6 % betragen soll. Wie groß ist der Fehler 2. Art, wenn der Ausschußanteil tatsächlich 0,035 beträgt?

Autor: Ulrich Rauscher, Lichtensteinstr. 37/1, 7150 Backnang

LK-Aufgabe

Eine Großstadt muß ihre Schulen mit Taschenrechnern versorgen. Die Herstellerfirma liefert diese Taschenrechner in 100 Packungen zu je 50 Stück.

- a) Das Schulverwaltungsamt entnimmt jeder Packung zufällig 4 verschiedene Rechner und überprüft sie. Die Packung wird nur dann angenommen, wenn alle 4 Rechner funktionieren. In einer Packung sind 5 defekte Rechner.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie trotzdem angenommen wird?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau 1 defekter Rechner gefunden wird?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 65 der 100 Packungen angenommen werden, wenn in jeder Packung 5 defekte Geräte sind?
- b) Der Hersteller garantiert, daß 90 % aller funktionierender Taschenrechner das Garantiejahr heil überstehen. Eine Schule gibt 200 funktionierende Taschenrechner aus.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Schule mehr als 22 Garantiefälle hat?
 - Geben Sie eine möglichst kleine Zahl k an, so daß mit höchstens 5 % Wahrscheinlichkeit mehr als k Taschenrechner von den 200 ausgegebenen im Garantiejahr ausfallen.
- c) Bei den defekten Rechnern ist bei 70 % die Tastatur, bei 20 % die Anzeige und bei 10 % beides kaputt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einem Taschenrechner die Tastatur defekt, wenn man weiß, daß die Anzeige nicht mehr funktioniert?
 - Wie hoch sind die durchschnittlichen Reparaturkosten für einen Rechner, wenn der Austausch der Tastatur 18 DM, und der Austausch der Anzeige 25 DM kosten?
- d) Der Hersteller behauptet, daß die Lebensdauer der Batterien normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von 3000 (h) bei einer Standardabweichung von 200 (h). Eine Schülergruppe testet die Batterien von 100 Rechnern und erhält einen Mittelwert von 2950 (h) bei einer Standardabweichung von 200 (h). Kann die Behauptung des Herstellers auf dem 0,05 - Niveau zugunsten der Alternativhypothese $H_1: \mu < 3000$ (h) verworfen werden?
- e) Die Zufallsvariable Z für die Lebensdauer einer verbesserten Batterie ist $N(\mu_Z; 100)$ -verteilt. Um eine Aussage über den unbekanntem Erwartungswert μ_Z machen zu können, wird eine Stichprobe vom Umfang 150 gezogen. Zu diesem gehört das zu \bar{z} symmetrisch liegende Vertrauensintervall $[3583; 3617]$. Bestimmen Sie die Vertrauenswahrscheinlichkeit δ .

Autor: Ulrich Rauscher, Lichtensteinstr. 37/1, 7150 Backnang

LK-Aufgabe

- a) Ein idealer Würfel enthalte abweichend vom Normalfall nur die Ziffern 1; 2; 3, und zwar dreimal die Ziffer 1, zweimal die Ziffer 2 und einmal die Ziffer 3. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich bei einem solchen Würfel für die verschiedenen Augenzahlen? Geben Sie auch das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß an.
- b) Ein idealer Würfel der Art von Teil a) soll auf seine Güte getestet werden (nur bezogen auf die Ziffer 1, $p(1) = 0,5$). Er wird 100-mal geworfen. Er wird als gut bezeichnet, wenn die Ziffer 1 mindestens 45-mal und höchstens 55-mal vorkommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Würfel irrtümlich als schlecht zu bezeichnen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Würfel irrtümlich als gut zu bezeichnen, falls $p(1) = 0,4$ ist? Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man sich in seinem Urteil, wenn die Augenzahl 1 insgesamt 40-mal vorkommt?
- c) Wie müßte eine Entscheidungsregel lauten, damit man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4 % den Würfel aus a) bei 100 Würfeln als gut bezeichnet (die Regel braucht nur für die Augenzahl 1 formuliert zu werden)?
- d) Bei einem Spiel wird mit 2 Würfeln von der Art in Teil a) gespielt und nach jedem Wurf die Augensumme beider Würfel ermittelt. Notieren Sie einen geeigneten Ergebnisraum. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße "Augensumme".

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

In einer Fahrkartenverkaufsstelle der Bahn beträgt der Anteil der Fahrkarten 1. Klasse an den verkauften Fahrkarten durchschnittlich 15 %.

- a) Ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der tatsächlich verkauften Fahrkarten 1. Klasse den durchschnittlich zu erwartenden Wert übertrifft, bei insgesamt 100 oder 200 verkauften Karten größer?
- b) An einem Geschäftstag werden insgesamt 480 Karten verkauft, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß
- b₁) genau 60
b₂) höchstens 50
b₃) mindestens 80
Fahrkarten 1. Klasse verkauft werden?
- c) Zu einer Tageszeit, in der durchschnittlich 120 Kunden pro Stunde die Verkaufsstelle aufsuchen, blockiert die automatische Tür drei Minuten lang. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 5 Kunden vor der blockierten Tür auf Einlaß warten müssen?
- d) Durch eine Umfrage unter den Fahrgästen soll herausgefunden werden, wieviel Prozent der Fahrgäste für gewisse Komfortverbesserungen einen höheren Preis zahlen würden. Das Ergebnis der Umfrage soll mit mehr als 80 % Wahrscheinlichkeit einen Fehler von höchstens 5 % aufweisen. Wieviel Fahrgäste sind zu befragen?

Autor: Kurt-Günther Wehmeyer, Lönsweg 29, 4905 Spenge
Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

- a) Für einen bestimmten Autobahnabschnitt wird die Behauptung aufgestellt, daß höchstens 10 % der dort fahrenden Fahrzeuge die dort bestehende Geschwindigkeitsbegrenzung nicht einhalten. Diese Behauptung soll verworfen werden, wenn von 200 zu beobachtenden Fahrzeugen mindestens 21 die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten.

Welche Fehler können bei diesem Test auftreten?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

Wie müßte die Entscheidungsvorschrift lauten, damit die These mit weniger als 10 % Wahrscheinlichkeit zu unrecht verworfen wird?

- b) Eine weitere These, daß nämlich 30 % der über diesen Autobahnabschnitt fahrenden Fahrzeuge LKW sind, soll anhand einer Stichprobe vom Umfang 100 auf dem Signifikanzniveau 3 % getestet werden.

Skizzieren Sie auch die Gütefunktion.

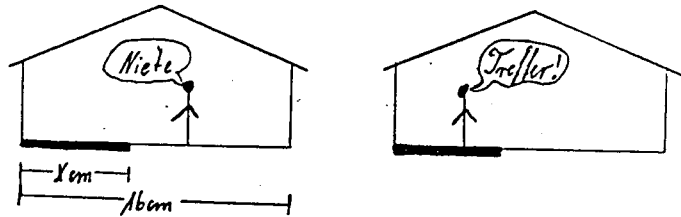
- c) Nehmen wir an, daß die These aus b) stimmt.

Wieviel Fahrzeuge muß man dann beobachten, damit mit mindestens 99 % Sicherheit wenigstens ein LKW dabei ist?

Autor: Kurt-Günther Wehmeyer, Lönsweg 29, 4905 Spenge

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe



Bei einem Wohltätigkeitsfest wird das neue Tele-Glücksspiel "Springer" vorgestellt. Auf einem Bildschirm ist eine Teilstrecke (x cm lang) einer Spielstrecke (Länge 16 cm) besonders hervorgehoben. Auf Knopfdruck des Spielers erscheint nun irgendwo auf der Spielstrecke ein Strichmännchen - der Springer. Man spricht von einem Treffer, wenn der Springer auf der hervorgehobenen Teilstrecke sichtbar wird (s. Skizze).

Die Wahrscheinlichkeit p für einen solchen Treffer ist also gegeben durch $p = \frac{x}{16}$ mit $0 < x < 16$.

a) Die Spielregeln sind wie folgt festgelegt: Jeder Spieler drückt 8mal auf den Knopf; man erhält einen Gewinn, wenn dabei genau 3 Treffer erzielt werden, d.h. genau 3mal der Springer irgendwo auf der markierten Strecke erscheint.

a₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit P gewinnt ein Spieler? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p an.

a₂) Bei welcher Trefferwahrscheinlichkeit p ist die Gewinnwahrscheinlichkeit P möglichst groß? Greifen Sie bei der Lösung auf die Hilfsmittel der Differentialrechnung zurück.

a₃) Wie lang ist dann die markierte Strecke?

b) Herr A besitzt ebenfalls dieses Spiel. Er stellt die Länge der markierten Strecke auf 3,2 cm ein, so daß die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer nun 0,2 beträgt. Herr A überlegt nun:

b₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalte ich, wenn ich 10 einzelne Spiele durchführe - also 10mal den Spielknopf betätige -, genau 2 Treffer, die aber nicht unmittelbar aufeinanderfolgen dürfen?

b₂) Wie oft muß ich spielen, wenn mit wenigstens 90 %iger Sicherheit die relative Häufigkeit der Treffer von der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,2$ um höchstens 5 % abweichen soll?

Schätzen Sie die Anzahl der Spiele

a) mit der Ungleichung von Tschebyschew

b) mit der Normalverteilung ab.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b) und nehmen Sie zu den Unterschieden Stellung.

Autor: Udo Memmert, Nachtigallenstr. 2 a, 5000 Köln 90

Schulbuch: 12

LK-Aufgabe

In einer Stadt wird der Bürgermeister direkt von allen Wahlberechtigten gewählt. Vor der Wahl will die Partei A wissen, ob es zweckmäßig ist, einen umfangreichen und damit teuren Wahlkampf zu führen, um ihren Kandidaten Müller durchzubringen, oder ob für die Wahl Müllers auch ein weniger umfangreicher Wahlkampf ausreicht. Dabei ist der Partei der Bürgermeisterposten wichtiger als möglichst niedrige Wahlkampfkosten. Die Partei beschließt, nur dann keinen harten Wahlkampf zu führen, wenn zur Zeit mehr als 40 % der Wahlberechtigten Müller wählen würden, da bei 4 Bewerbern 40 % erfahrungsgemäß zum Sieg ausreichen. Dazu würden vor der Wahl 500 zufällig ausgesuchte Wähler befragt, von denen 210 aussagten, Müller zu wählen.

- a) Formulieren Sie die zu testende Hypothese H_1 und die Gegenhypothese H_0 anhand des Aufgabentextes. (Begründung!)
- b) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % und interpretieren Sie das Stichprobenergebnis in Bezug auf den zu führenden Wahlkampf.
- c) Welche Fehlentscheidung kann die Partei damit treffen.
- d) Bestimmen Sie diejenigen Wahrscheinlichkeiten für die Wahl von Müller, die mit dem Stichprobenergebnis verträglich sind. Entscheiden Sie zunächst, ob das Näherungsverfahren anwendbar ist. Interpretieren Sie das Ergebnis auf den zu führenden Wahlkampf.

Autor: Heide Christiansen, Wachmannstraße 101, 2800 Bremen 1

LK-Aufgabe

- a) Ein Reiseunternehmen ermittelt, daß in einem Jahr von 127 439 Buchungen 14 656 wieder rückgängig gemacht wurden. Im Hotel A wurden von 1740 Buchungen 169 wieder storniert. Ist die Abweichung signifikant? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %)
- b) Das Ergebnis einer Umfrage ist, daß von 1000 Buchungen 115 wieder rückgängig gemacht werden. Ermittle ein Konfidenzintervall für den Prozentsatz der Stornierungen. (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %, die Erfolgswahrscheinlichkeit wird auf 3 Dezimalen gerundet.)
- c) Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei 11,5 %. Welchen Umfang muß man einer Befragung geben, wenn man ein Ergebnis mit einer Genauigkeit von 1 % erhalten will? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %.
- d) In einem Hotel nimmt man 100 Buchungen für 80 Betten an, da erfahrungsgemäß 20 % der Buchungen wieder rückgängig gemacht werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man einem Gast kein Zimmer anbieten? Wie viele Buchungen hätte man höchstens annehmen dürfen, wenn man das Risiko der Überbelegung nur in 0,15 % der Fälle eingehen will?

Autor: Herm.Jos. Dahmen, OStR, Reinaldstr. 21, 5350 Euskirchen

Schulbuch: 11

LK-Aufgabe

Der Test für medizinische Studiengänge (TMS) besteht aus 13 thematisch unterschiedlichen Untertests. Zwölf dieser Untertests haben die gleiche Struktur: Es stehen für 15 bis 26 Fragen jeweils 5 Antworten zur Auswahl, von denen jeweils genau eine richtig ist. Jede richtig bearbeitete Frage wird als Punkt gezählt. Maximal sind in diesem Bereich 260 Punkte zu erzielen.

a) Für einen bestimmten Prüfling mögen zwei Annahmen gelten:

- Er verläßt sich auf sein Glück und kreuzt die Antworten zufällig an.
- Er bearbeitet 80 % der Fragen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß er nur eine falsche Antwort angekreuzt hat - nach der Binominalverteilung, der lokalen Näherungsformel von Laplace und der Näherungsformel von Poisson.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

b) Berechnen Sie Mittelwert und Streuung für das Experiment: zufälliges, (richtiges) Ankreuzen der Antworten je Frage.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Testteilnehmer aus a) innerhalb der Streuung um den Mittelwert liegt.

c) Bei den insgesamt (etwa) 5000 Teilnehmern ergibt sich bei der Auswertung, daß die Zufallsvariable X mit der Wertemenge $W: = \{0, 1, 2, \dots, 278, 279, 280\}$ nach der Normalverteilung verteilt ist.

Die Testteilnehmer werden entsprechend ihren Ergebnissen in 5 Ranggruppen eingeteilt.

(Siehe Abbildung).

Berechne für den Mittelwert 148 und die Streuung $s = 22$ die Anzahl der Schüler in den einzelnen Ranggruppen.

(Ranggruppe 2,3,4 mit äquidistanten Intervallen innerhalb des Bereichs $-1s, 1s$.)

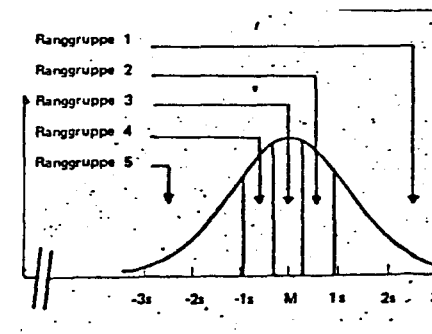


Abb. aus "Testbroschüre TMS", Institut für Test und Begabungsforschung (Hrsg.), Münster, 1980

Autor: Gerhard Schliter, Sundernholz 84, 43 Essen 1

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

Zwei Wettkämpfer besitzen je zwei Steine, mit denen sie abwechselnd auf eine Flasche werfen. X trifft mit Wahrscheinlichkeit $1/4$, Y trifft mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. X beginnt. Ein Kampf ist zu Ende, wenn die Flasche getroffen ist oder alle vier Steine geworfen wurden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß X bzw. Y gewinnt.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung p der Spieldauer ($1 < t < 4$), $\mu(p)$ und $\sigma(p)$.
- c) Wir betrachten die mittlere Spieldauer aus 4 Spielen. Sie kann die Werte $4/4, 5/4, 6/4, \dots, 16/4$ annehmen. Berechnen Sie (rekursiv) deren Verteilung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die mittlere Spieldauer um weniger als 0,25 vom Erwartungswert abweicht?
- d) Welche Ergebnisse liefern die Ungleichung von Tschebyscheff und der zentrale Grenzwertsatz? Nehmen Sie Stellung zu den Ergebnissen.
- e) Wieviele Wettkämpfe müßte man machen, damit die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung der mittleren Spieldauer vom Erwartungswert um mehr als 0.1 mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1 % eintreten (zentraler Grenzwertsatz).
- f) Bei 100 Spielen ergab sich eine mittlere Spieldauer von 2.2. Nehmen Sie Stellung!

Autor: Dr. Wolfgang Riemer, Kafkastraße 1, 5000 Köln 30

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

Bei der Produktion von Spezialschrauben wird jedes Stück mit der Wahrscheinlichkeit 0,15 unbrauchbar.

- a) Jemand benötigt 16 gute Schrauben.
Wieviele Schrauben muß der Kunde mindestens kaufen, damit er mit mindestens 80 % Sicherheit nicht weniger als 16 gute Schrauben erhält? Erläutern Sie den Gang der Lösung.
- b) Der Hersteller garantiert den Kunden bei Abnahme von 20 Schrauben, daß mindestens 75 % der Schrauben einwandfrei sind. Bei Abnahme von 100 Schrauben werden sogar 80 % gute Stücke garantiert. Entspricht eine Lieferung nicht der Garantie, wird diese kostenlos umgetauscht.
Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit der Lieferungen zu 20 und 100 Stück nicht der Garantie entsprechen.
- c) Die Maßzahl der Schraubenlänge wird durch die normalverteilte Zufallsvariable X mit $\sigma(X) = 0,75$ beschrieben. Ein Käufer mißt die Länge von 20 (zufällig ausgewählten) Schrauben. Er erhält die folgenden Werte in LE
23,5; 21,9; 24,1; 21,3; 23,2; 22,8; 22,4; 23,1; 22,9; 24,1; 23,0;
24,0; 23,6; 22,9; 24,7; 23,2; 22,8; 22,7; 23,2; 22,5.
Kann mit dieser Stichprobe auf dem Signifikanzniveau 0,1 die Behauptung des Herstellers, daß $E(X) = 23,5$ gilt zugunsten $E(X) \neq 23,5$ verworfen werden?

LK-Aufgabe

Eine Werbeagentur behauptet, daß nach ihrer Werbekampagne für eine Zeitschrift mindestens 20 % der erreichten möglichen Bezieher auch tatsächlich die Zeitung abonnieren werden. Nun stellt man fest, daß von 1 000 verschickten Werbekarten nur 177 zu einem Abonnement geführt haben. Läßt das Ergebnis den Schluß zu, daß die Angaben der Agentur auf dem 5 %-Signifikanzniveau zu verwerfen sind?

- a) Bei Einsatz geänderter Werbemittel kann die Agentur keine Angaben über die Mindestwahrscheinlichkeit für den Abschluß eines Abo's machen. Stelle eine OC-Wertetafel auf und zeichne die OC-Kurve, wenn nun von je 100 Adressaten bis zu 20 ein Abo abschließen. Für den Fall, daß auch hier $p = 0,2$ sei, zeichne man den maximalen α - und maximalen β -Fehler in das OC-Schaubild ein.
- b) Mehrere verschiedene Verlagsvertreter dieser Zeitung starten nun eine eigene Werbeaktion durch Hausbesuche bei je 100 Personen. Die Abschlußquoten für ein Abo sind erwartungsgemäß nicht gleich. Sie liegen zwischen 14 und 26 Erfolgen (beide einschl.) pro 100 Besuchen. Mit welchem Risiko wird die aus diesen Zahlen resultierende Annahme, daß Hausbesuche die Erfolgswahrscheinlichkeit 0,2 haben, abgelehnt, obwohl sie wahr ist?
- c) Man prüft die bei b) errechnete Wahrscheinlichkeit mittels der Tschebyscheff-Ungleichung.
- d) Stelle für b) eine OC-Wertetafel auf und zeichne den OC-Graphen, wenn $p = 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5$ angenommen wird.

Autor: OStR Manfred Volz, Hervorster Str. 18 A, 4180 Goch 1

LK-Aufgabe

1. Der Dachverband der deutschen Touristikunternehmen möchte Aufschlüsse über die Neigung der Urlauber erhalten, im nächsten Sommer ihren Urlaub in Deutschland zu verbringen. Nach den Erfahrungen der Vorjahre wird geschätzt, daß dies ungefähr 20 % der Urlauber sein werden.
 - a) Wieviele Personen müssen in einer Umfrage nach dem künftigen Urlaubsziel befragt werden, wenn das Ergebnis aus der Befragung von der tatsächlichen Verbreitung der "Deutschlandurlauber" um höchstens 1,5 % abweichen soll? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %).
 - b) Wieviele Personen müßten die Demoskopien nach ihrer Absicht, den Urlaub in Deutschland zu verbringen, befragen, wenn man wieder eine Fehlermarge von 1,5 % zuläßt aber keine Vermutung über das Ergebnis hat? (Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei nun 90 %).
 - c) Bei einer Umfrage unter 500 potentiellen Urlaubern gaben 158 an, ihren Urlaub in Deutschland verbringen zu wollen. Auf welchen Prozentsatz "Deutschlandurlauber" in der Gesamtheit kann man da daraus schließen? (Sich.W.: 95,5 %).
 - d) Im vorigen Jahr betrug der Anteil der Deutschlandurlauber 21 %. In einem Reisebüro wurden für jenes Jahr von 900 Urlaubsbuchungen 163 für einen Deutschlandurlaub geordert. Ist diese Zahl ungewöhnlich? Wären 213 Deutschlandbuchungen von 900 ungewöhnlich?

Autor: OStR Manfred Volz, Hervorster Str. 18 A, 4180 Goch 1
Schulbuch: 6

LK-Aufgabe

Eine Maschine produziert elektronische Bauteile. Eine Untersuchung hat ergeben, daß mit 5 % Ausschuß zu rechnen ist. 200 Teile der Produktion werden zu einer Sendung zusammengefaßt.

- a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen 5 und 15 (je einschließlich) defekte Teile in einer Sendung enthalten sind, mittels der Tschebyscheff-Ungleichung ab.
- b) Bestimmen Sie die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise durch Einsatz einer geeigneten Normalverteilung.
- c) Bestimmen Sie die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit exakt.
- d) Es soll nun eine Sendung zusammengestellt werden, die höchstens 12 defekte Teile enthält. Wieviele Bauteile darf die Sendung höchstens enthalten, damit diese Forderung mit Wahrscheinlichkeit 0,85 eingehalten wird?

Autor: Manfred Kriegler, Florastr. 59, 4300 Essen 1

Schulbuch: 6

LK-Aufgabe

- a) In einer Schule gilt ein Lernziel als erreicht, wenn in einem "1 aus 4" -Auswahltest von 5 Items 3 richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Erfolgswahrscheinlichkeit durch bloßes Raten?

Ein Schüler weiß die Antwort auf 1 Item und rät die restlichen 4 Antworten. Wie groß ist seine Erfolgswahrscheinlichkeit?

- b) Die Erfolgswahrscheinlichkeit durch bloßes Raten hängt von der Zahl n der Items ab, wenn für einen Erfolg mindestens 60 % der Items richtig beantwortet sein müssen.

Bestimmen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit für $n = 12$

($e^{-3} \approx 0,05$), und schätzen Sie sie für $n = 100$ ab! (für $n = 100$ keine genaue Rechnung!).

- c) Läßt sich n so erhöhen, daß für den Erfolg auf dem 5 % Signifikanzniveau mindestens 50 % der Items (40 % der Items) durch Wissen richtig beantwortet werden müssen (d.h. höchstens 10 % bzw. 20 % durch Raten)?
- d) Sind die Ansätze zu a) und c) realistisch und die Ergebnisse entsprechend zuverlässig?

Autor: Dr. Joachim Grunert, Auf dem Kleegarten 5, 5307

LK-Aufgabe

Unter den untersuchten Personen befinden sich n Patienten, die unabhängig voneinander an der Krankheit K leiden. Von dem Medikament M ist bekannt, daß es jede an K erkrankte Person mit der Wahrscheinlichkeit p heilt.

- a) Bestimmen Sie die W -keit dafür, daß alle n Patienten durch M geheilt werden können!
- b) Es sei $n=4$. Welcher Ergebnisraum eignet sich für Beschreibung dieses Zufallsexperiments?
- c) Es sei $n=5$, $p=0,2$. Betrachtet wird die Zufallsvariable X_5 - "Die Anzahl der Personen, die durch M geheilt werden können".
Bestimmen Sie mit Hilfe der W -keitsfunktion ihre Verteilung.
Zeichnen Sie in ein Achsenkreuz ihren Graphen und ihr Histogramm (Längeneinheit auf der W -keitsachse 10 cm);
- d) Es sei $n=150$, $p=0,04$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichste Anzahl der Personen, die durch M geheilt werden können. Wie groß ist die zugehörige W -keit? Wenden Sie eine entsprechende Approximation an!
- e) Es ist festgestellt worden, daß im Ort A zwei und im Ort B vier Personen an der Krankheit K leiden. Die W -keit, daß mindestens die Hälfte der Personen, die durch M geheilt werden können, ist für A größer als für B. Für welche Werte von p ist das der Fall?
(Anleitung: Rechnen Sie mit $q=1-p$)

Autor: Zbigniew Urmanin, Otto-Hahn-Str. 8, 5630 Remscheid-Lennep

LK-Aufgabe

Aus einem Artikel in der FAZ vom 13.6.1980 unter dem Titel "Wenn der Flugpassagier nicht mitgenommen wird":

"Das Überbuchen ist nämlich mittlerweile eine ganz normale Praxis fast aller Luftverkehrsgesellschaften. Damit soll eine bessere Durchschnittsauslastung der Maschinen erreicht werden. Nach aller Erfahrung erscheint ein fast gleichbleibender nennenswerter Anteil der fest gebuchten Passagiere nicht zum Start. ... Ohne Überbuchung blieben daher im Mittel bei voll ausgebuchten Flügen bis zu 25 Prozent der Sitze leer. ... Die Buchungscomputer der Luftverkehrsgesellschaften sind jetzt so programmiert, daß sie auch noch über eine hundertprozentige Auslastung der Maschinen hinaus - beispielsweise bis zu 108 Prozent der rechnerischen Kapazität - Festbuchungen akzeptieren . . ."

Es soll nun angenommen werden, daß ein Fluggast, der fest gebucht hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wirklich erscheint. Eine Boeing 707 hat 144 Sitze, bei Überbuchung von 8 % nehme die Gesellschaft daher 156 Buchungen an.

- a) Es habe sich herausgestellt, daß 25 % der Fluggäste weiblich sind und diese mit Wahrscheinlichkeit 95 % auch erscheinen, wenn sie gebucht haben.
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dann ein männlicher Fluggast, der gebucht hat?
 Ein Fluggast, der gebucht hat, erscheint nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Frau?

- b) Man berechne exakt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Flugzeug voll besetzt ist und niemand abgewiesen werden muß. Man berechne diese Wahrscheinlichkeit entsprechend mit einer geeigneten Näherungsformel, wenn nur Frauen (nur Männer) gebucht haben.
- c) Man berechne mit Hilfe der Tabelle von Φ , mit welcher Wahrscheinlichkeit mehr Fluggäste kommen als Plätze zur Verfügung stehen. Man erläutere an diesem Beispiel auch den Gebrauch der φ - und ψ -Tabellen und den Begriff 'standardisierte Zufallsvariable'. Insbesondere ist zu erläutern, wieso man beim Gebrauch der φ -Tabelle durch σ dividieren muß, beim Gebrauch der ψ -Tabelle aber nicht.
- d) Man schätze das Ergebnis aus c) mit Hilfe der TSCHEBYSCHEW-Ungleichung ab. Wie ist der große Unterschied zum wirklichen Ergebnis zu erklären?
- e) Angenommen, die Fluggesellschaft ist bereit, in 1 % der Fälle Überbuchungen zu riskieren. Wieviele Buchungen darf sie annehmen?
(Sie dürfen die entstehende Ungleichung auch durch Probieren lösen!)

Autor: StD Berg, Clara-Schumann-Gymnasium, Loestraße 14,
5300 Bonn 1

Schulbuch: 15

LK-Aufgabe

- a) Eine Stichprobe vom Umfang 4 wird einem Behälter, der 16 Stücke, darunter 4 defekte, enthält, zufällig und mit Zurücklegen entnommen. Die Zufallsgröße Y gibt an, wieviel defekte Stücke die Stichprobe enthält.
- (1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.
- (2) Berechnen Sie: $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$
- b) Aus demselben Behälter wird nun eine Stichprobe vom Umfang 4 zufällig und ohne Zurücklegen entnommen.
- (1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichnen Sie ein Histogramm.
- (2) Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$.

Autor: Antonius Warmeling, Ribbertstraße 15, 5800 Hagen 8

LK-Aufgabe

Eine Firma stellt Maschinenteile her, die eine Länge von 225 mm haben sollen. Nach einer Testphase gelingt die Produktion mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,2$ mm.

- a) Für welche maximale Abweichung vom Erwartungswert 225 mm kann die Firma garantieren, wenn höchstens 5 % Ausschuß einkalkuliert werden sollen?
- b) Aufgrund dieser Garantie bestellt ein Abnehmer eine große Menge dieser Maschinenteile. Ein Stück gilt als fehlerhaft, wenn die Länge nicht im garantierten Intervall liegt. Zur Abnahme einer Lieferung wird der folgende Prüfplan vereinbart:
In einer ersten Prüfung werden 50 Stücke (mit Zurücklegen) entnommen und nachgemessen. Die Lieferung wird angenommen, wenn höchstens ein fehlerhaftes Maschinenteil vorkommt, abgelehnt, wenn mehr als 3 fehlerhafte gefunden werden. Bei 2 oder 3 fehlerhaften Stücken werden noch einmal 20 geprüft. Jetzt wird die Lieferung angenommen, wenn diesmal nur höchstens ein fehlerhaftes Teil vorkommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Sendung angenommen wird?
- c) Angenommen, ein Testverfahren soll so exakt sein, daß mit einer Sicherheit von mindestens 90 % die Anzahl der fehlerhaften Stücke nur um weniger als 1 % vom relativen Erwartungswert abweicht. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung ab, wieviele Teile geprüft werden müßten, um diese angestrebte Sicherheit zu erhalten?

- d) Bei einer Kontrolle von 20 Schrauben der Fabrik A werden 4 defekte gefunden.
Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % davon ausgehen, daß der Anteil der defekten Schrauben der Fabrik A doch höher als 10 % ist?
- e₁) Wie viele defekte Schrauben müssen bei einer Stichprobe von 150 Stück der Fabrik A mindestens gefunden werden, damit die Hypothese, der Anteil der defekten Schrauben sei höher als 10 %, auf dem 5 %-Niveau gerechtfertigt erscheint?
- e₂) Aus der Lieferung einer der beiden Fabriken A oder B wird eine Stichprobe vom Umfang 150 entnommen, sie enthält 23 defekte Schrauben; es ist nicht mehr festzustellen, von welcher Fabrik diese Schrauben kommen.
Kann man die Hypothese, daß die 150 Schrauben aus der Lieferung von Fabrik A stammen, auf dem 5 %-Niveau ablehnen? (Die oben angegebenen Ausschußanteile sollen dabei korrekt sein!).

Autor: Reinhold Gottsheim, Langenacker 113, 4600 Dortmund 15

Schulbuch: 12

LK-Aufgabe

Im Jahr 1983 wurden in der Gewinnklasse III (5 Richtige) des Zahlenlottomos "6 aus 49" die folgenden Gewinne erzielt:

(nach "Glück" Nr. 2, 1984)

Klasse (in DM)	2500-3700	3700-4900	4900-6100	6100-7300
abs.Häufigkeit	2	4	11	15

Klasse (in DM)	7300-8500	8500-9700	9700-10900	10900-12100
abs.Häufigkeit	6	6	4	2

Klasse (in DM)	12100-13300	13300-14500	(rechtsabgeschlossene Intervalle)
abs.Häufigkeit	0	2	

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Richtige im Lotto zu erzielen?
- b) Berechnen Sie die charakteristischen Parameter der vorgegebenen Verteilung.
- c) Testen Sie auf dem 10 %-Niveau die Hypothese, die Zufallsvariable X, die jeder Ziehung den Gewinn in Klasse III zuordnet. Ist normalverteilt.
- d) Zeigen Sie, daß sich die in c) verwendete Testgröße Q auch in der Form

$$Q = n \cdot \sum_i \frac{(H_i - p_i)^2}{p_i}$$

darstellen läßt, wobei die Zufallsgröße H_i der i-ten Klasse die relative Häufigkeit zuordnet.

Autor: Antonius Warmeling, Ribbertstraße 15, 5800 Hagen 8

LK-Aufgabe

a) 4 Ehepaare - Aa, Bb, Cc, Dd - machen mit 4 Booten eine Kahnpartie, wobei sich jede Dame zufällig einen Herrn als Ruderer auswählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in allen Booten nur Ehepaare sitzen?
Arbeiten Sie mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und formulieren Sie alle benutzten Ereignisse genau.

b) Das Picknick am Ziel nimmt die Gesellschaft an einem viereckigen Tisch ein, bei dem an jeder Seite 2 Stühle stehen. Jeder wählt sich zufällig einen Platz.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen jeweils die Ehepartner nebeneinander an derselben Seite?
Warum liegt hier ein anderes Problem als bei a) vor?

c) Verallgemeinern Sie die Berechnungen für n Paare, Boote, Tischseiten.

d) Sind die Ereignisse "Herr a sitzt neben Frau B" und "Herr c sitzt neben Frau D" voneinander unabhängig?

Autor: Rüdiger Volkmer, Jägerweg 6, 4750 Unna

Schulbuch: 16, 1

LK-Aufgabe

Ein idealer (Laplace-)Würfel wird 1200 mal unabhängig geworfen.

"Treffer" bedeute: die Augenzahl ist durch 3 teilbar.

Berechnen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Treffer X im Intervall $[380; 420]$ liegt mit Hilfe

- der Tschebyschew-Ungleichung,
- der Bernoulli-Formel (nur Ansatz) und
- der Formel von DeMoivre-Laplace.

Vergleichen Sie die Ergebnisse und werten Sie!

Berechnen Sie die kleinste natürliche Zahl k , so daß mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % die Anzahl der Treffer im Intervall $[400-k; 400+k]$ liegt.

Autor: Elmar Micus, Erbhof 13, 4630 Bochum 1

LK-Aufgabe

Die 1200 Schüler einer Schule gründen einen Fonds, in den jeder pro Jahr 10 DM einzahlt und von dem jeder, der sitzenbleibt, zum Trost 160 DM erhält. Die Wahrscheinlichkeit des Sitzenbleibens beträgt $p = 0,05$.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bereits bei der ersten Versetzung das Kapital nicht ausreicht?
- b) Wieviel Schüler müßte die Schule haben, damit dies Risiko (bei gleicher Auszahlung und gleichem Beitrag) kleiner als 0,1 % wird?
- c) Welcher Beitrag müßte erhoben werden oder welche Auszahlung müßte festgesetzt werden, damit bei 1200 Schülern dies Risiko geringer als 0,1 % ist?
- d) Bei der ersten Versetzung bleiben 70 Schüler sitzen. Handelt es sich hierbei um eine signifikante Zunahme, so daß zu vermuten ist, die Trostprämie steigere die Sitzenbleiberquote?
- e) Versuchen Sie eine Aussage über das Risiko im 2. Geschäftsjahr zu machen.

Autor: OstR Michael Klein, Malenter Str. 13 a, 48 Bielefeld 17

LK-Aufgabe

a) Ein Mann versucht sich das Rauchen abzugewöhnen. Wenn er an einem Tag keine Zigarette geraucht hat, dann raucht er am nächsten Tag in 30 % der Fälle 2 Päckchen, in 40 % der Fälle 1 Päckchen. Raucht er an einem Tag 1 Päckchen, dann schafft er es in 50 % der Fälle, am nächsten Tag nicht zu rauchen; in 10 % der Fälle raucht er sogar 2 Päckchen. Nach einem Tag mit 2 Päckchen Zigarettenkonsum erinnert er sich an seinen Vorsatz und raucht am nächsten Tag nicht.

a₁) Geben Sie zur beschriebenen MARKOFF-Kette Übergangsdiagramm und -Matrix M an.

a₂) Berechnen Sie die Matrixpotenzen M^2, M^3, M^4 .

a₃) Welche Eigenschaft gilt für die jeweiligen Spaltenvektoren der Folge M^2, M^4, M^8, \dots ? Warum gilt dies nicht für die Folge M, M^2, M^3, M^4, \dots ?

a₄) Gelingt es dem Mann, auf lange Sicht seinen Zigarettenkonsum wenigstens zu senken, wenn er vor seinem ersten Vorsatz im Mittel täglich 1 Päckchen geraucht hat? Was ändert sich bei einem Konsum von 2 Packungen?

b) Welchen Grenzzustand haben die MARKOFF-Ketten, deren Übergangsmatrizen N_1 bzw. N_2 sind? Hängt der Grenzzustand vom Anlaufvektor ab?

$$(1) \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LK-Aufgabe

Die zwei Taxen eines Taxiunternehmers sind zu jedem Zeitpunkt mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ besetzt.

Falls ein Taxi besetzt ist, befördert es mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine, zwei oder drei Personen.

Eine Zufallsvariable X gebe die Anzahl der besetzten Taxen an, eine Zufallsvariable Y die Anzahl der Fahrgäste, die von beiden Taxen befördert werden.

a) Bestimme eine geeignete Ausgangsmenge S, die auf S definierten Zufallsvariablen X und Y und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X!

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion des zufälligen Vektors (X, Y) und ihre Randverteilung!

c) Zeichne den Graf der Verteilungsfunktion F von (X, Y) im Bereich $[0;2[\times [0;2[$!

d) Bestimme $E(X), E(Y), (VAR(X), VAR(Y)$ und $VAR(X+Y)$!

e) Interpretiere die Zufallsvariable $Z = \frac{Y}{X}$ ($X \neq 0$) !

f) Zeige: $P(Z=z_k / X \neq 0)$ ist Term einer Wahrscheinlichkeitsfunktion!

g) Berechne $E(Z / X \neq 0)$ und interpretiere das Ergebnis !

Autor: Udo Scholl, Städt. Gymnasium Köln-Mülheim, Düsseldorfer Str. 13, 5000 Köln 80

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

Für ein Schulfest plant eine Schülergruppe den Bau eines Glücksspielautomaten: Drei Räder R_1 , R_2 und R_3 mit den gleichwahrscheinlich auftretenden Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 werden unabhängig und nacheinander nach folgender Regel bedient: Die Zahl, die bei R_1 auftritt, kann nicht mehr verändert werden, während die Räder R_2 und R_3 jeweils ein zweites Mal in Gang gesetzt werden dürfen (aber nicht müssen). Der Einsatz soll 10 Pf sein; eine Auszahlung erfolgt bei drei gleichen Zahlen auf R_1 , R_2 und R_3 . Der Auszahlungsbetrag ist $a \cdot 10$ Pf, wenn a auftritt. Es wird davon ausgegangen, daß jeder Spieler auf Gewinn bedacht ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 1 1 1 zu erzielen?

Zeichnen Sie zur Beantwortung ein Baumdiagramm.

Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Zahlen zu erhalten, $\frac{121}{6^4}$ ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 30 Pf Reingewinn pro Spiel zu erzielen?

Welchen Reingewinn kann die Schülergruppe pro Spiel erwarten?

b) Da die Schülergruppe sich nicht ganz sicher ist, ob die oben angegebene Berechnung richtig ist, will sie das Spiel vor dem Bau des Automaten mit Zufallszahlen simulieren. Beschreiben Sie eine solche Simulation von 20 Durchführungen des Experiments, und überprüfen Sie die oben berechnete Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Zahlen zu erhalten. Beginnen Sie mit der ersten Spalte der beiliegenden Tafel mit Zufallsziffern, lassen Sie die 5 Tupel aus, welche andere Ziffern als 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 enthalten. Geben Sie die verwendeten Zufallszahlen an.

c) Man erwägt, ob man bei zwei gleichen Zahlen auf den Rädern R_1 und R_2 als Trostpreis ein Freispiel gewähren soll.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, 1 1 $\bar{1}$ zu erzielen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, ein Freispiel zu erzielen.

d) Nachdem die einzelnen Räder des Glücksspielautomaten gebaut sind, werden sie getestet. Für das Rad R_1 wurden bei 100 Versuchen folgende Zahlen beobachtet:

44566	66462	26213	45643	46646
35522	22616	53631	55666	52233
31443	25463	21316	65554	33224
15565	12541	14262	36254	14546

Sei X die jeweils gezeigte Zahl. Ermitteln Sie einen Schätzwert \bar{X} für den Erwartungswert $E(X)$.

Beweisen Sie die Gleichung $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.

Ermitteln Sie mit ihrer Hilfe auch einen Schätzwert für die Standardabweichung $\bar{\sigma} = \sqrt{V(X)}$

Autor: StD Günter Hitschke, Am Redder 8, 2000 Wedel (Holst.)

LK-Aufgabe

Eine Maschine stelle Werkstücke mit einer Ausschußquote von 20 % her. Man entnimmt der Produktion unabhängig voneinander eine Stichprobe von 10 Werkstücken.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau zwei Ausschußstücke, mindestens zwei oder höchstens zwei?
- b) Die Ereignisse A und B seien wie folgt definiert:
- A: In der Stichprobe sind genau zwei Ausschußstücke.
B: Die beiden ersten Stücke der Stichprobe sind Ausschußstücke.
- Berechnen Sie den Wert $P_B(A)$! Die dabei zu benutzende bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ ist zu definieren!
- c) Eine zweite Maschine stelle Werkstücke mit einer Ausschußquote von 10 % her. Es werden Packungen zu je 10 Werkstücken erzeugt. Man wählt zufällig aus einer Tagesproduktion eine Packung aus. Sie enthält genau drei Ausschußstücke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ihr Inhalt von der besseren Maschine hergestellt?
- d) Beweisen Sie folgenden Satz:

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$$

Schulbuch: 1

LK-Aufgabe

Am UEFA-CUP-Wettbewerb nehmen 64 Fußballmannschaften aus ganz Europa teil, darunter die Mannschaften A, B, C, D, E aus Deutschland. Die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Spieles gegen einen ausländischen Gegner seien für die deutschen Mannschaften $P(A)=0,9$; $P(B) = 0,8$; $P(C) = P(D) = P(E)=0,6$. Falls zwei deutsche Mannschaften gegeneinander spielen, sei für jede die Gewinnwahrscheinlichkeit 0,5.

- a) Wie groß ist $P(E_1)$ für E_1 : "Alle 5 deutschen Mannschaften erreichen die 2. Runde", falls sie in der 1. Runde nicht gegeneinander spielen?
- b) Berechnen Sie $P(E_2)$ für E_2 : "Mannschaft B gewinnt den Pokal" unter der Voraussetzung, daß sie das Glück hat, nie auf einen deutschen Gegner zu treffen.
- c) Unter den letzten 8 sind 3 deutsche Mannschaften. Diese wollen natürlich nach Möglichkeit nicht aufeinandertreffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle deutschen Mannschaften einen ausländischen Gegner zugelost bekommen?
- d) Unter den letzten 4 sind die Mannschaften A und C sowie 2 ausländische Teams. Berechnen Sie $P(E_4)$ für E_4 : "A oder C wird Cupsieger", falls im Halbfinale A nicht gegen C spielt, falls im Halbfinale A gegen C spielen muß, bevor man weiß, wie die Halbfinalpaarungen aussehen.
- e) Mannschaft A hat mit Rudi Bumm einen Freistoßspezialisten. Von 10 Freistößen in Strafraumnähe verwandelt er in der Regel 3 zu

einem Tor.

Wieviele Freistoße in Tornähe muß der Schiedsrichter Mannschaft A wenigstens zusprechen, damit Rudi Bumm mit mindestens 90 % Sicherheit ein Freistoßtor erzielt?

Autor: StD Werner Weßling, Ruhrblick 24, 5840 Schwerte

LK-Aufgabe

Die Firma Hinz & Co bezieht regelmäßig eine Lieferung von 10 000 Schrauben. 70 % der Schrauben werden von der Fabrik A geliefert und enthalten 10 % Ausschuß, während der Rest jeweils von der Fabrik B kommt und 18 % Ausschuß enthält.

a) Wie hoch ist der Ausschuß in der Gesamtlieferung?

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine defekte Schraube von Fabrik A bzw. B?

b) Die Firma Hinz & Co hat eine Lieferung erhalten und prüft 100 der von Fabrik A stammenden Schrauben, die zufällig ausgewählt werden.

Berechnen Sie genähert die Wahrscheinlichkeit, daß genau 10 von diesen Ausschuß sind; gehen Sie dabei von der Annahme aus, daß für jede Schraube die Wahrscheinlichkeit, defekt zu sein, die gleiche ist.

- Rechtfertigen Sie diese Annahme und geben Sie den exakten Term an, mit dem man die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen müßte.

Alle folgenden Rechnungen sollen unter der in Teil b) genannten Annahme erfolgen!

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht bei einer Stichprobe vom Umfang 200 der von Fabrik A gelieferten Schrauben die Anzahl der defekten um mindestens 7 vom Erwartungswert ab?

Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der integralen Näherungsformel und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert, der nach der Ungleichung von Tschebyscheff höchstens möglich erscheint.

d) Würde man 1500 Teile prüfen, so müßten nach den Angaben des Herstellers 75 fehlerhafte erwartet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der fehlerhaften Stücke zwischen 60 und 90 liegt?

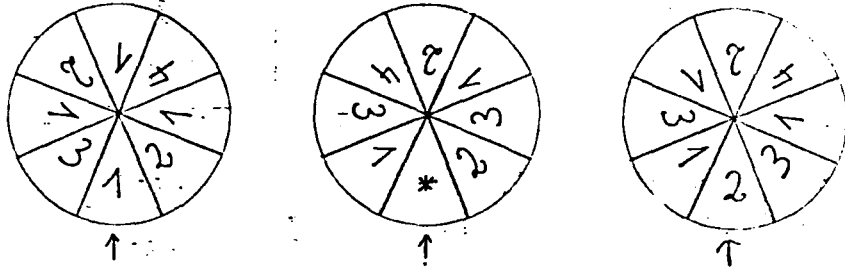
e) Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse von c) und d)!

Autor: Wolfgang Ruwe, Griesenbruchstr. 41, 4905 Spenge

Schulbuch: 12

LK-Aufgabe

Der Glücksspielautomat "Die silberne Vier" weist auf seinen 3 Scheiben S_1 , S_2 und S_3 die folgenden Zahlen auf:



Die 3 Scheiben werden gleichzeitig gestartet und stoppen unabhängig voneinander nach mindestens 15 sec und höchstens 30 sec. Die Sektoren auf den Scheiben sind alle gleich groß. Der Einsatz beträgt 20 Pf pro Spiel. Ausgezahlt wird nach folgendem Gewinnplan: Befinden sich in den mit " " markierten Sektoren

4 4 4 oder 4×4 2,00 DM 3 3 3 oder 3×3 1,60 DM
 2 2 2 oder 2×2 1,00 DM 1 1 1 oder 1×1 0,60 DM
 allein auf der 2. Scheibe 0,40 DM.

a) Man verifiziere folgende Tabelle:

ausgezahlter Betrag	0,40	0,60	1,00	1,60	2,00
Wahrscheinlichkeit	$\frac{45}{512}$	$\frac{36}{512}$	$\frac{12}{512}$	$\frac{6}{512}$	$\frac{2}{512}$

b) Man zeige, daß der im Durchschnitt ausgezahlte Gewinn mehr als 60 % des Einsatzes beträgt.

c) Eine Weiterentwicklung dieses Glücksspielautomaten, "Die goldene Vier" gestattet es, die Scheibe S_1 , die als erste stoppt, nochmals zu starten, solange die anderen Scheiben noch laufen. Man

zeige, daß es günstig ist, bei einer "4" auf S_1 nochmals zu starten.

Im weiteren wird nur das Modell "Die silberne Vier" betrachtet.

- d) Wie groß ist die W.-keit, daß man mit 60 Pf 5 Spiele an dem Automaten durchführen kann, wenn man zwischenzeitlich erzielte Gewinne wieder verwendet?
- e) Wie oft muß man mindestens an dem Automaten spielen, damit man mit mindestens 95 %iger W.-keit mindestens einmal etwas ausgezahlt erhält.
- f) Anlässlich seines Geburtstages verspricht der Wirt der Hafenkneipe "Zum Silberfisch" jedem Gast, der an dem in seiner Kneipe befindlichen Automaten "Die silberne Vier" bei einem Spiel 2 DM ausgezahlt erhält, eine "Seezunge Müllerin Art" kostenlos zu servieren. 4 Seezungen hat er dafür bereitgestellt. Mit welcher W.-keit reicht dies aus, wenn an dem betreffenden Tag 400 Spiele am Automaten gemacht werden (Näherungslösung, ohne Verwendung der Tabelle)?

g) Bevor ein Spielautomat aufgestellt werden darf, muß von amtlicher Seite eine Prüfung des Modells erfolgen. Dabei werden 5000 Spiele durchgeführt, und es wird notiert, wie oft die einzelnen Gewinnfälle eintreten. Bei der Prüfung eines Automaten ergab sich die folgende Tabelle:

Gewinnfall	1 1 1	2 2 2	3 3 3	4 4 4	*
	1×1	2×2	3×3	4×4	
Anz.d.Spiele	378	136	51	15	481

Ist die Abweichung dieser Zahlen von den theoretischen Häufig-

keiten gemäß Teil a) der Aufgabe signifikant auf dem 10 %-Niveau (χ^2 -Test)

- h) Herr Meier vermutet, daß an einem Spielautomaten des Typs aus a) Manipulationen vorgenommen worden sind. Er stellt dazu fest, wie oft bei 400 Spielen die Zahl "4" auf der ersten Scheibe erscheint. Geben Sie einen Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ an, mit dem Herr Meier seine Vermutung überprüfen könnte. Erläutern Sie, ob dabei ein einseitiger oder ein zweiseitiger Test angebracht ist.

Autor: Klaus Maß, Theodor-Heuss-Gymnasium, Theodor-Körner-Str. 25,
4350 Recklinghausen

LK-Aufgabe

Eine Firma stellt Taschenrechner her. Diese gibt sie in Packungen zu je 10 Stück ab.

- a) Ein Kunde bezieht 10 Packungen. Aus jeder Packung entnimmt er 3 (verschiedene und zufällig ausgewählte) Geräte und überprüft sie. Der Kunde nimmt die Packung nur an, wenn er lauter intakte Geräte findet.

- a₁) In einer Packung sind ohne das Wissen des Kunden 2 defekte Rechner.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Packung angenommen wird?
- a₂) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle 10 Packungen angenommen werden, wenn in jeder 2 defekte Geräte sind?
- b) Bei der Produktion wird jedes Gerät mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 defekt. Die defekten Rechner haben mindestens einen der Fehler F_1, F_2 . $P(F_1) = 0,04$; $P(F_1, F_2) = 0,0025$.
Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler unabhängig voneinander vorkommen.
- c) Der Hersteller behauptet, daß die Batterie-Betriebszeit der Rechner den Erwartungswert 2000 h und die Standardabweichung 100 besitzt. Er behauptet weiter, daß die Betriebszeit mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 mindestens 2500 h beträgt.
Nehmen Sie unter Zuhilfenahme der Tschebyscheffschen Ungleichung Stellung zu der Behauptung.
- d) Die Behauptung des Herstellers, daß der Erwartungswert der Batterie-Betriebszeit 2000 h beträgt, wird mit einer Stichprobe vom Umfang 200 getestet. Die 200 Stichprobenwerte haben den Mittelwert 1981 h und die Standardabweichung 99.
Kann damit die Behauptung des Herstellers auf dem 0,05 Niveau zugunsten der Alternativhypothese $\mu < 2000$ h verworfen werden?

LK-Aufgabe

Das Theater in Schillerstadt hat 1000 Plätze (500 im Parkett, 300 im 1. Rang, 200 im 2. Rang) und verfügt über eine große Pausenhalle mit Getränkeauschank.

a) Peter, Fritz und 4 weitere Freunde besuchen die Samstagvorstellung. Peter kauft 6 nebeneinanderliegende Platzkarten und verteilt sie willkürlich.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: "Peter und Fritz haben nebeneinanderliegende Plätze"?

b) Die ausverkaufte Vorstellung ist zu 80 % von Abonnenten besucht. Man weiß, daß in der Regel etwa die Hälfte dieser Besuchergruppe in der Pause eine Erfrischung kauft, von den übrigen Theatergästen tun dies 70 %. Peter trifft zu seiner Freude in der Pause seine Freundin Susi; sie hält ein Glas Sekt in der Hand. Berechnen Sie $P(B)$ für B: "Susi hat ein Theaterabonnement".

c) Für die Freitagvorstellung ist der gesamte 1. Rang vom Schwerter Theaterring ausgebucht. Erfahrungsgemäß erscheinen im Schnitt 2 % dieser Besuchergruppe nicht. Theaterdirektor Müller verläßt sich darauf, daß für ihn und seine Frau 2 Plätze im 1. Rang freibleiben (nicht unbedingt nebeneinanderliegend). Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er die Plätze tatsächlich?

Lösen Sie diese Teilaufgabe x) mit der Binomialverteilung, / mit der Poisson-Näherung und) mit der Laplace-Näherung. Vergleichen Sie die Ergebnisse und nehmen Sie wertend und begründend in je einem Satz dazu Stellung.

d) Der Theaterparkplatz ist noch in der Planung. Erfahrungsgemäß muß man bei einer ausverkauften Vorstellung mit 400 Fahrzeugen rechnen.

Wieviele Parkplätze müssen angelegt werden, wenn das Risiko, daß bei einer ausverkauften Vorstellung ein Besucher keinen Parkplatz findet, kleiner als 5 % sein soll?

Autor: StD Werner Weßling, Ruhrblick 24, 5840 Schwerte

LK-Aufgabe

Eine 6-köpfige Familie (Vater, Mutter, 2 Töchter, 2 Söhne) macht einen Jahrmarktbummel.

a) Zunächst geht's zur Achterbahn. Ein Wagen hat 6 Plätze (3 Zweierreihen). Der Vater kauft die Karten, die entsprechend den Sitzen im Wagen von 1 bis 6 durchnummeriert sind. Der Vater verteilt die Karten willkürlich, die Familie setzt sich den Karten entsprechend hin.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

Vater und Mutter nebeneinander sitzen,
die drei männlichen Familienmitglieder links sitzen,
die beiden Töchter hintereinander sitzen?

b) Im Bierzelt gibt es 200 Sitzplätze. In der Regel halten sich 5 % der Gäste lieber stehend an der Theke auf. Die Kassiererin am Eingang läßt 210 Personen herein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Besucher, der sich setzen will, keinen Platz findet?

c) Die Besucher des Bierzeltes sind zu 70 % männlich; 40 % von ihnen ißt zum Getränk eine Bockwurst, bei den weiblichen Besuchern tut dies jede zweite. Die Kellnerin bringt eine Bockwurst.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Bockwurst von einer Frau bestellt worden?

d) Bei der Losbude ist jedes 20. Los ein Hauptgewinn. Wieviele Lose muß die Familie mindestens kaufen, um mit mehr als 90 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Hauptgewinn zu landen?

Lösen Sie die Aufgabe auf 2 Arten, begründen Sie Ihren Ansatz und vergleichen Sie wertend die Ergebnisse.

Autor: StD Werner Weßling, Ruhrblick 24, 5840 Schwerte

LK-Aufgabe

Bei einem Großtransport von Fliesen entstand ein Transportschaden. Bei einer Stichprobe von 1000 Fliesen stellte der Lieferant fest, daß davon 329 beschädigt waren.

a) Darf der Lieferant die Fliesen noch als Ware der Qualitätsstufe III verkaufen, wenn in dieser Qualitätsstufe höchstens 35,0 % der Fliesen beschädigt sein dürfen?

Bestimmen Sie das Konfidenzintervall zur Konfidenzwahrscheinlichkeit $\gamma = 0,95$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis in bezug auf die Fragestellung. Verwenden Sie bei der Berechnung das Ihnen bekannte Näherungsverfahren und begründen Sie, warum dies erlaubt ist.

b) Der Lieferant vereinbart mit seinen Abnehmern den Preis der Qualitätsstufe III. Er ist jedoch bereit, einen Preisnachlaß zu gewähren, wenn der Abnehmer bei der Lieferung auf Grund einer Stichprobe davon ausgehen muß, daß der Anteil p der beschädigten Fliesen den gerade noch erlaubten Anteil von $p_0 = 0,35$ übersteigt. Geben Sie eine Entscheidungsregel an, so daß bei einer Prüfung von 300 Fliesen der Preisnachlaß in höchstens 1 % aller Fälle zu Unrecht gewährt wird.

Berücksichtigen Sie bei der Beantwortung der Frage die folgenden Punkte:

b₁) Stellen Sie zunächst zwei geeignete Hypothesen H_0 und H_1 auf und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b₂) Formulieren Sie dazu den Fehler 1. Art bezogen auf das Problem.

LK-Aufgabe

Bei der Herstellung von Spezialfiltern ist von einem Ausschußanteil von 0,2 auszugehen. Der Hersteller verspricht seinen Kunden, daß mindestens 80 % der Filter einwandfrei sind.

a) Ein Händler erhält 2 Sendungen mit a) 20 bzw. b) 100 Filtern.

a₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entspricht die Sendung a) nicht dem Herstellerversprechen?

a₂) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entspricht die Sendung b) dem Herstellerversprechen? Berechnen Sie in diesem Fall zusätzlich zum genauen Wert einen Näherungswert.

b) Der Händler verkauft von den in a) genannten Sendungen jeweils 50 % aller Filter nach einer zufälligen Auswahl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbleiben dem Händler nur einwandfreie Filter in den beiden Restsendungen? (Berechnung mit TR)

c) Eine Kontrolle von 10 Sendungen mit je 20 Filtern ergibt:

Sendung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl d. Ausschußstücke	3	2	5	4	0	3	3	2	8	2

c₁) Bestimmen Sie den Mittelwert und die Stichprobenvarianz und vergleichen Sie diese Werte mit μ und σ^2 .

c₂) Mit welcher relativen Häufigkeit taucht eine Sendung auf, die nicht dem Herstellerversprechen entspricht?

d) Die Solldicke der Flachfilter betrage 8 mm, die Standardabweichung 0,5 mm. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Dicke eines zufällig aus der Produktion entnommenen

Filters zwischen 7 und 9 mm liegt. Warum wählen Sie diesen (Ihren) Ansatz?

e₁) Nach einer Modifikation des Herstellungsverfahrens erhält man bei einer Stichprobe vom Umfang 1000 folgende Werte:

mittlere Dicke = 7,8 mm ; $s = 1,2$ mm.

Berechnen Sie zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $\gamma = 0,95$ ein zur Stichprobe passendes Vertrauensintervall für den Erwartungswert.

e₂) Die Überprüfung der Stichprobe ergab 880 einwandfreie Filter. Kann auf dem Signifikanzniveau von 5 % widerlegt werden, daß die Änderung im Herstellungsverfahren den Ausschußanteil auf maximal 10 % gesenkt hat?

Autor: Dipl.Math. W. Isbach, Deitersweg 9, 44 Münster

Schulbuch: 12

LK-Aufgabe

Die Gegner der Y-Partei haben durch das X-Institut eine Umfrage durchführen lassen, wonach die Y-Partei bei der nächsten Wahl nur mit $p = 4\%$ der Stimmen rechnen kann und daher an der 5 %-Klausel scheitern wird. Fritz ist Anhänger der X-Partei.

- a) Fritz fragt sich, wie wahrscheinlich es ist, daß unter 10 seiner Sportkameraden niemand die Y-Partei wählt, bzw. daß mindestens 2 sie wählen werden. (Setze $19^{10} \approx 6,13 \cdot 10^{12}$).
- b) Wie wahrscheinlich ist es, daß von Fritzens 25 Arbeitskollegen 3 oder mehr die Y-Partei wählen werden? ($e \approx 2,72$)
- c) Wie wahrscheinlich ist es, daß in Fritzens Gemeinde mit 500 Wahlberechtigten genau 25 bzw. mehr als 29 die Y-Partei wählen werden? ($\sqrt{19} \approx 4,4$)
- d) Schließlich macht Fritz eine eigene Umfrage mit 400 Personen und findet, daß 26 sich zur Y-Partei bekennen. Wie ist danach die vom X-Institut angegebene Zahl $p = 4\%$ zu beurteilen? Welche Empfehlung muß man Fritz für die Durchführung seiner Umfrage geben?
- e) Welches Vertrauensintervall kann Fritz bei 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit aus seiner Umfrage nach d) für p angeben? Grob- und Feinabschätzung für p .
- f) Wieviele Personen müßte Fritz befragen, um p bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % auf 1 % genau ermitteln zu können? Mit Grob- und Feinabschätzung für p .

- g) Kann Fritz allein durch eine eigene genügend sorgfältige und umfangreiche Befragung nachweisen, daß die Umfrage des X-Instituts unseriös war?

Die Voraussetzungen für alle Ansätze sind kritisch zu prüfen, in Hinblick darauf, wie realistisch die richtigen Rechenergebnisse sein dürften.

Autor: Dr. Joachim Grunert, Auf dem Kleegarten 5, 5307

Schulbuch: 6

LK-Aufgabe

Die Maßzahlen für die Lebensdauer einer bestimmten Röhrensorte lassen sich als Funktionswerte einer Zufallsgröße L auffassen. L soll so definiert sein, daß 1000 Stunden als Zeiteinheit dienen.

Die Dichtefunktion f_L soll gegeben sein durch

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{für } x \geq 1. \\ x & \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, daß f_L den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt und bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_L . Zeichnen Sie beide Graphen in je ein Koordinatensystem (Zeichnung nach Wertetabelle, keine Kurvendiskussion).

b) Wieviel Prozent aller Röhren dieses Typs haben eine größere bzw. kleinere Lebensdauer als $E(L)$ Zeiteinheiten?

Erörtern Sie die Bedeutung von $E(L)$ und die unterschiedliche Größe der berechneten Prozentwerte im Zusammenhang mit dem gegebenen Sachverhalt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Röhre dieses Typs eine Lebensdauer von mindestens 2000 Stunden besitzt.

In einem Gerät befinden sich drei Röhren dieses Typs. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet dieses Gerät mindestens 2000 Stunden, wenn es

Fall 1: dazu erforderlich ist, daß alle drei Röhren mindestens 2000 Stunden funktionieren?

Fall 2: es genau dann ausfällt, wenn alle drei Röhren versagen?

Hinweis: Die Lebensdauer aller anderen Bauteile dieses Geräts soll nicht berücksichtigt werden.

d) Begründen Sie, warum die Dichtefunktion

$$g_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \\ x & \end{cases}$$

für die vorstehende Aufgabe nicht voll geeignet ist.

Hinweis: Versuchen Sie, $E(L)$ für diese Dichtefunktion zu berechnen.

Autor: Dr. Klaus Dreißigacker, Hammersteinstraße 39, 3200 Hildesheim

LK-Aufgabe

n Kinder werfen der Reihe nach mit einem Ball auf eine Dose. Nach dem n-ten Kind ist wieder das erste Kind an der Reihe. Das Kind, das als erstes die Dose trifft, hat gewonnen. In diesem Fall ist das Spiel beendet. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig.

a) Sei $n=3$ und treffe jedes Kind mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p < 1$.

a₁) Wie groß ist, in Abhängigkeit von p, die Gewinnwahrscheinlichkeit p_i für das i-te Kind $i = 1; 2; 3$ beim ersten bzw. zweiten Durchgang?

a₂) Die Zufallsvariable X nehme den Wert k an, wenn das Spiel nach dem k-ten Wurf beendet ist. Bestimmen Sie $P(X=k)$, $k \in \mathbb{N}$.

a₃) Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1$. (Tip: Geometrische Reihe)

b) Die drei am Spiel beteiligten Kinder haben verschiedene Trefferwahrscheinlichkeiten $p_1; p_2; p_3$.

b₁) Die Trefferwahrscheinlichkeit des ersten Kindes sei p. Welche Trefferwahrscheinlichkeiten (in Abhängigkeit von p) haben die beiden anderen Kinder, wenn alle drei Kinder die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit haben sollen?

(Ergebnis: $p_2 = \frac{p}{1-p}$; $p_3 = \frac{p}{1-2p}$)

b₂) Warum ist für $p = 1/3$ das Spiel spätestens nach der ersten Runde beendet?

b₃) Für $p = 1/3$ sei Y die Zufallsvariable, die die Anzahl der Würfe in der ersten Runde angibt. Bestimmen Sie $E(Y)$ und $V(Y)$.

c) Nun werfen n Kinder der Reihe nach, wobei jedes Kind höchstens einmal wirft. Für jedes Kind sei die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich $1/n$. Z sei die Anzahl der Würfe, nach denen das Spiel beendet ist.

c₁) Zeigen Sie: $E(Z) = \frac{n+1}{2}$ und $V(Z) = \frac{n^2-1}{12}$

c₂) Für welche Zahlen n ist aufgrund der Tschebyschew'schen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Z von $E(Z)$ um weniger als 4 abweicht mindestens gleich 75 %?

Autor: Rolf Kinscher, Uhlandstr. 31, 562 Velbert 1

Schulbuch: 6

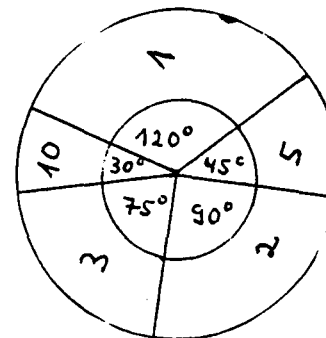
LK-Aufgabe

Ein Glücksautomat besteht unter anderem aus einer gläsernen Halbkugel mit Radius $r = 20$ cm. In der Mitte der Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $\hat{r} = 12$ cm rot markiert. Im Mittelpunkt der Grundfläche befindet sich eine Vorrichtung, die (nach Einwurf einer Münze) in irgendeine willkürliche Richtung eine Kugel abschießt: alle Punkte der Halbkugel sind als Auftreffpunkte gleich wahrscheinlich. Trifft die Kugel auf das Glas der Halbkugel, so fällt sie von dort senkrecht nach unten auf die Grundfläche.

a) Der Automat ist so eingestellt, daß dem Spieler das Dreifache des eingezahlten Betrages ausgezahlt wird, falls seine Kugel im roten Kreis landet. Mit wieviel Prozent Gewinn kann der Aufsteller des Automaten rechnen? (Sie können ohne Herleitung die Formeln für Kugel und Kugelteile aus der Formelsammlung, S. 13, übernehmen.)

b) Der rot markierte Teil der Grundfläche sei, wie in der Skizze gezeigt, in 5 Sektoren aufgeteilt. Die Zahl im Sektor gibt an, das Wievielfache des Einsatzes ausgezahlt wird, falls die Kugel in diesem Sektor landet. Im nicht-roten Kreisring der Grundfläche steht die Zahl 0.

- (1) Erklären Sie an diesem Beispiel die Begriffe Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion (mit Graph). Sie können davon ausgehen, daß $\frac{1}{5}$ der abgeschossenen Kugeln im roten Feld landet.
- (2) Mit wieviel Prozent Gewinn kann der Aufsteller des Automaten in diesem Fall rechnen?
- (3) Bestimmen Sie $P(X > 1)$. Welche Bedeutung hat diese Wahrscheinlichkeit in unserem konkreten Fall?



Autor: Hans-Günter Sahr, Lotharstraße 9, 5000 Köln 41

LK-Aufgabe

a) Die Urne U_1 enthalte 6 weiße und 18 schwarze Kugeln, die Urne U_2 dagegen 9 weiße und x schwarze Kugeln. Betrachtet werden folgende Zufallsexperimente Z_1 und Z_2 :

Z_1 : Eine Urne wird zufällig ausgewählt und daraus zufällig eine Kugel gezogen.

Z_2 : Die Inhalte beider Urnen werden zusammengeschüttet. Danach wird aus der Gesamtmenge eine Kugel gezogen.

Wie groß muß x sein, damit Z_1 und Z_2 dieselbe Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, liefern?

b) Eine Urne mit sechs Kugeln soll aufgrund einer Zufallsauswahl von drei Kugeln mit Zurücklegen daraufhin getestet werden, ob sie zwei weiße Kugeln enthält. Stelle eine sinnvolle Entscheidungsregel auf und berechne die Risiken erster und zweiter Art, wobei das Risiko zweiter Art auch zeichnerisch darzustellen ist.

c) Der Anteil der weißen Kugeln in einer Urne sei p . Herr A zieht n Kugeln mit Zurücklegen. A gewinnt, wenn sich unter diesen n gezogenen Kugeln genau eine weiße befindet. Bestimme den von n abhängigen Wert von p , für den seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist, und berechne die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit.

Autor: StR Wolfgang Göbels, In den Wiesen 9, 5060 Berg.-Gladbach 2

Schulbuch: 2

LK-Aufgabe

12 % der Kinder im Grundschulalter benutzen zum Schreiben bevorzugt die linke Hand ("Linkshänder").

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man in einer solchen Klasse von 20 Kindern 0, 1, 2 Linkshänder?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man in einer Grundschule mit 250 Kindern genau 30 Linkshänder an? (Berechnung mit lokaler und globaler Näherungsformel)

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 5000 Grundschulkindern zwischen 580 und 630 (einschl.) Linkshänder?

d) Die Angabe 12 % ist aus einer Stichprobe gewonnen. Wie genau ist die Angabe, wenn die Stichprobe vom Umfang 600 war? (95 %-Konfidenzintervall)

e) Welchen Umfang müßte eine Stichprobe haben, damit der Anteil auf 0,5 % geschätzt werden kann? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %).

f) In einer Untersuchung im 5. Schuljahr fand man unter 200 Kindern 14 Linkshänder. Was läßt sich über die Vermutung sagen, daß Kinder mit zunehmendem Alter die Linkshändigkeit verlernen? (Welche Hypothese muß hierzu getestet werden? Welches sind Fehler 1. bzw. 2. Art?).

Autor: StD H.K.Strick, Pastor-Scheibler-Str. 10, 5090 Leverkusen 31

Schulbuch: 10

Aufgabe: Gymnasialer Zweig der Höheren Handelsschule

20 % der üblichen Gesamtproduktion eines Artikels, den ein Hersteller anbietet, sind fehlerhaft.

1. Ein Abnehmer ist an einer großen Lieferung des Artikels interessiert und will die Fehlerquote der Lieferung durch eine Stichprobe vom Umfang 100 testen.

- a) Wenn sich höchstens 25 fehlerhafte Stücke in der Stichprobe befinden, dann will der Abnehmer die Gesamtlieferung akzeptieren; andernfalls soll sie vom Hersteller zurückgenommen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lieferung aus der üblichen Produktion irrtümlich vom Hersteller zurückgenommen werden muß?
- b) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel so, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Hersteller eine Lieferung aus der üblichen Produktion zurücknehmen muß, höchstens 1 % ist.
- c) Wie groß ist das Risiko des Händlers, aufgrund der in b) bestimmten Regel eine Sendung mit 30 % Ausschuß nicht zurückzusenden?

2. Mit dem Abnehmer wird folgende Stichprobenregel vereinbart:

Zunächst wird der Lieferung eine Stichprobe von 10 Stück entnommen. Sind in der Stichprobe mehr als 3 fehlerhafte Stücke, so lehnt der Abnehmer die Lieferung ab. Sind in der Lieferung höchstens 2 fehlerhafte Stücke, so nimmt er die Lieferung an.

Sind in der Stichprobe genau 3 fehlerhafte Stücke, so wird eine

2. Stichprobe von 10 Stück entnommen und die Lieferung vom Abnehmer akzeptiert, wenn sich in der 2. Stichprobe höchstens ein fehlerhaftes Ausschußstück befindet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Lieferung aus der üblichen Produktion aufgrund dieses Stichprobenverfahrens vom Abnehmer akzeptiert?

3. Von den fehlerhaften Artikeln weist die Hälfte nur Schönheitsfehler auf, die andere Hälfte ist unbrauchbar. Der Hersteller will die Stücke mit Schönheitsfehlern zum halben Preis und die unbrauchbaren Stücke zum Materialwert von 2,-- DM verkaufen.

- a) Berechnen Sie den erwarteten durchschnittlichen Erlös, wenn die einwandfreien Stücke für 40,-- DM verkauft werden.
- b) Wie müßte der Verkaufspreis für einwandfreie Stücke gewählt werden, damit die durchschnittlichen Herstellungskosten von 30,-- DM pro Stück gedeckt werden können?

Aufgabe: Abendgymnasium

a) Im Bereich einer Bundesbahndirektion verkehren täglich 100 Lokomotiven. Um eventuell ausfallende Maschinen zu ersetzen, stehen 15 Lokomotiven bereit.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Ersatzmaschinen nicht ausreicht, wenn eine Maschine im Durchschnitt an 10 von 100 Tagen wegen Wartungs- und Reparaturarbeiten ausfällt?

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Anzahl der ausgefallenen Maschinen vom Erwartungswert um mehr als 5 abweicht.

Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 240 Lokomotiven, die täglich verkehren, die tatsächliche Anzahl der ausgefallenen Maschinen von dem Erwartungswert um mehr als 20 abweicht. $P(|X - \mu| > c) \leq \frac{V(X)}{c^2}$

b) Wie oft muß man einen Laplace-Würfel wenigstens werfen, um mit der Wahrscheinlichkeit von 0,9 wenigstens eine 6 zu erhalten?

c) Beweisen Sie: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wenigstens einmal Erfolg bzw. Mißerfolg eintritt, beträgt $1-(1-p)^n$ bzw. $1-p^n$.

Autor: Herr Holtkötter, Städt. Abendgymnasium, Wienburgstr. 52-54
4400 Münster

Schulbücher zur Stochastik

(in Klammern: Autoren des Schulbuchs)

Bayerischer Schulbuch-Verlag

1. LK Stochastik (Heigl/Feuerpfeil)
2. GK Stochastik (Feuerpfeil/Heigl/Volpert)
3. Praktische Stochastik (Feuerpfeil/Heigl/Wiedling)

Ehrenwirth Verlag

4. Stochastik GK (Barth/Bergold/Haller)
5. Stochastik LK (Barth/Haller)

Klett Verlag

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik / Lambach-Schweizer (Schmidt/Stark)
7. GK Stochastik / Sigma (Blankenagel/Scheid/ u.a.)

Metzlersche Verlagsbuchhandlung (früher: Vieweg)

8. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Althoff/Koßwig)

Schroedel Schulbuch Verlag / Verlag Schöningh

9. GK Stochastik / Mathematik heute (Athen/Bruhn)
10. LK Stochastik / Mathematik heute (Bruhn/Strick)

Schroedel Schulbuch Verlag

11. Einführung in die Beurteilende Statistik (Strick)

Schwann, Pädagogischer Verlag

12. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Lauter/Rüdiger)