"ZUFALL" UND BEGÜNSTIGEN

von Manfred Borovcnik , Klagenfurt

Das Drei-Gefangenen-Problem ist in vielen Varianten bekannt und in der Literatur offenbar deshalb so populär, weil es eine "paradoxe" Lösung hat. Im folgenden wird zur Auflösung des Puzzles (in einer dazu äquivalenten Einkleidung) nicht etwa die Bayessche Formel herangezogen, weil die Lösung daraus auf dem intuitiven Level nicht mitverfolgt werden kann. Einsicht in die Problematik soll dagegen die folgende Behandlung des Problems mit dem sogenannten Begünstigen-Konzept bieten.

1. Darstellung des Problems

1.a Zum Drei-Gefangenen-Problem selbst

Markus, Lukas und Johannes sind zu Tode verurteilt, einer von ihnen jedoch soll mittels eines Zufallsmechanismus ausgelost und begnadigt werden. Die gängige Variante dieses Beispiels beginnt mit folgender Überlegung: Markus bittet den Wärter, der vom Ergebnis der Auslosung Bescheid weiß, ihm doch den Namen eines der beiden anderen zu nennen, der nun endgültig verurteilt ist. Sagt der Wärter: "Lukas ist endgültig verurteilt", so ist nur mehr die Wahl zwischen ihm und Johannes. Sind nun seine Chancen, freigesprochen zu werden, auf $\frac{1}{2}$ gestiegen?

Manchmal findet man auch diese Variante: Egal, was der Wärter sagt, "Lukas ist endgültig verurteilt" oder "Johannes ist endgültig verurteilt", Markus' Chancen steigen von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$. Das würde aber nun bedeuten, daß seine Chancen sich entscheidend verbessern, nur dadurch, daß der Wärter ihm verspricht, einen der beiden übrigen tatsächlich zu nennen. Er braucht das Ergebnis gar nicht mitgeteilt bekommen! Der Wärter kann sich sogar irren, z.B. er kann die Namen von Lukas und Johannes verwechseln.

1.b Zur Problematik der Problemformulierung[1)]

Die obige Problemformulierung entstammt keiner realen Situation, sondern einer gekünstelten, mit "Realtext" versehenen, vollends vorstrukturierten Modellsituation. Das ist typisch für viele Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Typisch ist dabei auch eine grobe Unempfindlichkeit gegenüber moralischen Kategorien (Mord- und Totschlag, Pistolenduelle, "Bibeltexte" etc.). Schüler finden den Text zu Recht schockierend. Einerseits wird durch den Text Realitätsnähe vorgetäuscht, andererseits gibt es im Hinblick auf das Anwenden von Mathematik (Stochastik) überhaupt keine spezifischen Anforderungen, es ist lediglich ein Standard-Kalkül auf die vorstrukturierte Situation anzupassen.

Ich habe die obige Problemformulierung deshalb angesprochen, weil es sich hiebei um ein "klassisches" und somit bekanntes Standardbeispiel handelt. Der Leser/die Leserin kennt vermutlich auch die Schwierigkeiten, die bei der Lösung auftreten. Aus eigenem Unterricht bzw. aus Arbeiten zur Unterrichtsforschung ist vermutlich auch das Phänomen bekannt, daß Schüler(innen) auch nach Konfrontation mit vielen derartigen "Puzzles" die jeweilige formale Lösung mittels der BAYESschen Formel "paradox" empfinden, weil sie nicht sehen können, *wie* die formale Mathematik das Problem lösen hilft.

1.c Ein anderer Kontext

Die folgende Problemformulierung stammt von R. INEICHEN [6], S. 85 f:

"Die drei Kinder einer Familie, Jael, Catrina und Silvan, haben an einem Wettbewerb teilgenommen, jedes für sich. Sie sind sicher, die richtige Lösung eingesandt zu haben; sie

---

1) Diesen Abschnitt habe ich auf Anregung von Herrn B. ANDELFINGER eingefügt.

wissen, daß der Gewinner unter den Einsendern der richtigen Lösung ausgelost wird. Heute erzählt der Vater voll Freude: 'Eines von Euch hat den ersten Preis gewonnen; morgen Sonntag, so um die Mittagszeit, wird ihm der Preis überbracht werden'. Silvan überlegt, daß seine Chance, den Preis gewonnen zu haben, $\frac{1}{3}$ beträgt. Im Geheimen geht er zum Vater: 'Sag mir doch, bitte, wer gewonnen hat.' Vater sagt ihm natürlich nichts. Schließlich meint er: 'Sage mir doch wenigstens den Namen einer meiner Schwestern, die nichts gewonnen hat, und zwar so:

- nenne mir Jael, wenn Catrina gewonnen hat,
- nenne mir Catrina, wenn Jael gewonnen hat,
- nenne mir entweder Jael oder Catrina - nach Deiner Wahl -, wenn ich gewonnen habe'.

Der Vater denkt nach; dann sagt er: 'Catrina'. - Jetzt freut sich Silvan natürlich: Als Gewinner kommen ja nur noch Jael und er in Frage; seine Chance ist also auf $\frac{1}{2}$ gestiegen! Oder am Ende doch nicht?"

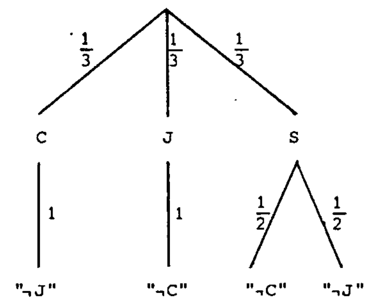
2. Lösung des Problems mit der BAYES-Formel

2.a Darstellung der Standardlösung

Zunächst einige Bezeichnungen:

C, J, S	C ...	Catrina hat den Preis gewonnen.
¬C, ¬J, ¬S	¬C ...	Catrina hat den Preis nicht gewonnen.
"¬C", "¬J", "¬S"	"¬C" ...	Vater sagt zu Silvan: "Catrina hat den Preis nicht gewonnen".

Der Vater hat folgende beiden Aussagen "¬C", "¬J" zur Verfügung, die Aussage "¬S" wird er sicher nicht machen. Die Informationen aus der (neuen) Problemstellung kann man sehr übersichtlich in folgendem Baumdiagramm speichern:



Es gilt:

(1) $$P(S|"\neg C") = \frac{P(S\wedge "\neg C")}{P("\neg C")} =$$

$$= \frac{P("\neg C"|S)P(S)}{P("\neg C"|S)P(S)+P("\neg C"|J)P(J)+P("\neg C"|C)P(C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Silvan den Preis gewinnt, wenn er zusätzlich vom Vater erfährt, daß Catrina nicht gewonnen hat, beträgt nach wie vor $\frac{1}{3}$.

2.b Zur Problematik der Standardlösung

Nach Erkennen der Problemstruktur als eine vom BAYES-Typ verbleibt nur die Arbeit der Zuordnung der einzelnen Informationen zu den entsprechenden Stellen im Baumdiagramm und das Belegen der Zweige mit Wahrscheinlichkeiten. Der Schwierigkeitsgrad kann gesteigert werden, wenn man die Lösung mit Hilfe der BAYES-Formel ohne Zuhilfenahme des Baumdiagramms verlangt.

Einsicht in die Problemlösung bietet sich m.E. nicht an. Nach Anwendung der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt es, die Multiplikationsregel (im Zähler von (1)) und den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (für P("¬C") im Nenner) *formal* anzuwenden. Die auftretenden Wahrscheinlichkeiten und die damit durchgeführten Operationen scheinen ohne Zusammenhang und *bedeutungslos*. *Tätigkeiten* erschöpfen sich im Herstellen der BAYESschen Beziehungsstruktur, es muß geprüft werden, welche Information wo im Schema einzuordnen ist. Von Tätigkeiten im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, von Revision von Wahrscheinlichkeitsbewertungen (P(S) etc.) unter neuen Informationen ("¬C") ist keine Rede.[1)]

Ich vermute darin eine wesentliche Ursache, daß Schüler/ Studenten auch nach Unterricht in Stochastik, auch nach Bearbeitung derartiger Puzzles, immer wieder daran scheitern (siehe etwa J.M. SHAUGHNESSY [7]). Die durch die Art der Mathematik, mit der sie konfrontiert wurden, allenfalls entstandenen sekundären Intuitionen (so sie überhaupt entstehen konnten) haben m.E. sehr wenig (wenn überhaupt etwas) gemein mit sehr stark verwurzelten primären Intuitionen, die immer wieder durchschlagen.

3. Lösung des Problems mit dem Begünstigen-Konzept

3.a Das Standardproblem

Silvans Überlegung trifft, wenn überhaupt, auch auf die Aussage des Vaters, "Jael hat nicht gewonnen" zu. Man kann die Ergebnisse seiner Überlegung so gerafft wiedergeben:

---

1) Der BAYES-Kalkül in odds-Form bietet im Gegensatz zu hier dargestellten Defiziten Chancen, den Lösungsweg auf intuitiver Ebene mitzuverfolgen (siehe [4]).

(2) $P(S) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(S\,|\,"\neg C") = \frac{1}{2}$ $\qquad P(S\,|\,"\neg J") = \frac{1}{2}$

Diese Wahrscheinlichkeitsbewertungen sind nicht konsistent. Das kann man aus folgender Beziehungskette sofort ablesen:

A,E Ereignisse, $0 < P(E) < 1$, es begünstige das Ereignis E das Eintreffen von A, d.h.

$$P(A|E) > P(A|\neg E);$$

man sagt dann auch, ¬E beeinträchtigt (benachteiligt) A.

Es gilt dann:

(3a) $P(A|E) > P(A) > P(A|\neg E)$.

Falls E das Eintreffen von A benachteiligt, hat man:

(3b) $P(A|E) < P(A) < P(A|\neg E)$.

Eine dritte Möglichkeit gibt es auch noch, nämlich, daß A unabhängig von E ist, dann hat man:

(3c) $P(A|E) = P(A) = P(A|\neg E)$.

Beziehungen dieser Art werden in [3] diskutiert und bewiesen. Das Begünstigen stellt meiner Ansicht nach eine fundamentale stochastische Idee dar. Die Ergebnisse (3a)-(3c) sind auch intuitiv einsichtig: Hat man eine Wahrscheinlichkeitsbewertung von A, P(A), und eine zusätzliche Information E, so kann es sein, daß aufgrund dieser neuen Information E die Wahrscheinlichkeitsbewertung von A, P(A|E), nach oben zu korrigieren ist, i.e. $P(A|E) > P(A)$, erster Teil von (3a). Verfügt man über die gegenteilige Information ¬E, so muß man im selben Problem nach unten korrigieren, i.e. $P(A) > P(A|\neg E)$, zweiter Teil von (3a). In Beziehung (3b) hat man nur die Rolle von E und

$\neg E$ vertauscht. Ist jedoch die Bezugnahme auf Information E (das Eintreffen von E) von keinerlei Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsbewertung von A, es ist keine Neubewertung von A notwendig, i.e. $P(A|E) = P(A)$, so kann die gegenteilige Information $\neg E$ (das Ausbleiben) keinerlei neue Aufschlüsse über A liefern, also ist auch $P(A) = P(A|\neg E)$, auch die Bezugnahme auf $\neg E$ ändert die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsbewertung nicht. Wahrscheinlichkeitsbewertungen, die nicht den Beziehungen (3a)-(3c) genügen, passen nicht zusammen, sind nicht konsistent.

Im folgenden möchte ich von einigen Eigenschaften von Begünstigen Gebrauch machen und damit seine Schlagkraft zur qualitativen Orientierung in stochastischen Problemen verdeutlichen.

Im Kontext des Beispiels ist $\neg$"$\neg$C" gleichbedeutend mit "$\neg$J", der Vater hat lediglich die Aussagen "$\neg$C" sowie "$\neg$J" zur Verfügung. Wir sehen davon ab, daß er überhaupt nichts sagt (er gibt Silvans Bitte also nach). Er soll auch nicht - entgegen den Vereinbarungen - sagen, daß Silvan nicht gewonnen hat. Man hat also:

(4) $\neg$"$\neg$C" = "$\neg$J",

d.h. die Informationen "$\neg$C" und "$\neg$J" sind komplementär zueinander. Nach Beziehung (2) sollten sowohl "$\neg$C" als auch "$\neg$J" das Ereignis S begünstigen, das ist ein Widerspruch zu (3a) und (3b). Silvan kann mit seiner Überlegung nicht recht haben.

Aus Symmetriegründen zwischen "$\neg$C" und "$\neg$J" gilt jedenfalls

(5) $P(S|"\neg C") = P(S|"\neg J") =: p.$

Beide Informationen sollten in gleicher Weise die Wahrscheinlichkeitsbewertung von S verändern. Die Beziehung (5) führt auf denselben Widerspruch zu (3a) und (3b), wie ich gerade mit (2) gezeigt habe.

Unter den einschränkenden Bedingungen des Beispiels, insbesondere wegen Beziehung (4) und der Symmetrie zwischen "$\neg$C" und "$\neg$J" bleibt daher nur der Ausweg über (3c), es gilt daher:

(6) $P(S) = P(S|"\neg C") = P(S|"\neg J")$,

das bedeutet, daß die Information des Vaters für Silvan und seine Wahrscheinlichkeitsbewertung von S in keiner Weise relevant ist, S ist stochastisch unabhängig von der Aussage des Vaters.

Eine andersgeartete Aufklärung zeigt direkt, daß die Information des Wärters stochastisch irrelevant für die Bewertung von S ist:

Es gilt:

(7) A,E Ereignisse, $0 < P(A), P(E) < 1$.
A begünstigt E $\Leftrightarrow$ E begünstigt A, d.h.
$P(E|A) > P(E|\neg A) \Leftrightarrow P(A|E) > P(A|\neg E)$.

Begünstigen ist eine symmetrische Relation zwischen Ereignissen.[1] Analoges gilt für Benachteiligen, i.e. $P(E|A) < P(E|\neg A)$, siehe dazu [3].

Begünstigt die Information des Vaters, "$\neg$C", das Ereignis S? Dazu gleichwertig ist zu fragen (siehe (7)): Wird die Information "$\neg$C" durch S begünstigt? In Worten: Silvan gewinnt den Preis, begünstigt dies die Nennung von "Catrina gewinnt den Preis nicht"?

---

1) Diese Relation prallt förmlich auf stark verwurzelte inadäquate primäre Intuitionen und kann daher als Anlaß genommen werden, diese zu verändern. Nicht selten habe ich es erlebt, daß man mir nicht glaubte und nach Gegenbeispielen zu (7) gesucht hat.

Ohne Zusatzinformation ist aufgrund der Symmetrie zwischen Catrina und Jael:

(8) $P(\text{"}\neg C\text{"}) = P(\text{"}\neg J\text{"}) = \frac{1}{2}$.

Weiß man nun S, so gewinnt weder Catrina noch Jael. Wenn der Vater nun keine Präferenzen zwischen den Aussagen "¬C" und "¬J" hat (warum sollte er welche haben), gilt auch

(9) $P(\text{"}\neg C\text{"}|S) = P(\text{"}\neg J\text{"}|S) = \frac{1}{2}$

Damit ist aber die Bewertung von "¬C" unabhängig von der Kenntnis S, also ist nach (7) auch S unabhängig von der Kenntnis "¬C"!

Eine gänzlich andere Auflösung des Puzzles bietet H.-J. BENTZ in [2] - er greift auf das Hilfsmittel expliziter (die Auslosung des Gewinners/des zu Begnadigenden in der ursprünglichen Version) und impliziter (die Aussage des Vaters/des Wärters) Lotterien zurück und zeigt, daß die implizite Lotterie keine stochastische Information tragen kann.

3.b Eine Variante der Problemdarstellung

Jael hört das Gespräch zwischen Vater und Silvan (unbemerkt) mit. Vater teilt Silvan "¬C" mit. Ist die Situation für Jael gleich der von Silvan oder muß sie ihre Wahrscheinlichkeit für den Gewinn des Preises revidieren? Ist diese Information für Jael von stochastischem Wert? Wie groß ist $P(J|\text{"}\neg C\text{"})$?

Daß sich für Jael eine Neubewertung von J durch die mitgehörte Information "¬C" ergeben muß, kann man sich mit dem Begünstigen-Konzept sehr schnell klar machen:

"¬C" begünstigt J $\Leftrightarrow$ J begünstigt "¬C",

(Symmetrie von Begünstigen, siehe (7)).

Nun gilt aber:

(10) $P(\text{"}\neg C\text{"}|J) = 1$!

Gewinnt Jael den Preis, so *muß* der Vater die Information "¬C" an Silvan weitergeben, d.h. J begünstigt "¬C" und daher begünstigt die Information "¬C" auch J. Jael kann ihre Wahrscheinlichkeit nach oben korrigieren.

Wie groß aber ist die vorzunehmende Korrektur?
Es gilt:

(11) $0 < P(A) < 1$, A, E Ereignisse;
$P(E) = P(E|A)\,P(A) + P(E|\neg A)P(\neg A)$,

d.h. P(E) ist ein gewichteter Mittelwert von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Für E:=J, A:="¬C" und ¬"¬C"="¬J" gilt nach (11):

(12) $P(J) = P(J|\text{"}\neg C\text{"}).P(\text{"}\neg C\text{"})+P(J|\text{"}\neg J\text{"})P(\text{"}\neg J\text{"})$.

Weil nun $P(J|\text{"}\neg J\text{"}) = 0$, $P(\text{"}\neg C\text{"}) = \frac{1}{2}$, $P(J) = \frac{1}{3}$, gilt damit weiters:

(13) $\frac{1}{3} = P(J|\text{"}\neg C\text{"}).\frac{1}{2}+0\,.\frac{1}{2}$, d.h. $P(J|\text{"}\neg C\text{"}) = \frac{2}{3}$!

Die Wahrscheinlichkeit, den Preis zu gewinnen, steigt für Jael auf $\frac{2}{3}$. Die Information "¬C" ist für Silvan und Jael von unterschiedlichem stochastischen Wert!

4. Ausblick

Hier wurde ein zum Drei-Gefangenen-Problem äquivalentes Problem mittels der Relation Begünstigen aufgelöst. Im Begünstigen-Konzept sehe ich eine Chance, lokale Strategien zur Lösung von Problemen zu entwickeln, die zusätzlich tragfähige stochastische Intuitionen aufbauen lassen. Am Begünstigen kann man Besonderheiten stochastischen Denkens im Vergleich zu kausalen Schemata, zu Common-Sense sowie zum logischen Denken herauszeichnen - etwa ist Begünstigen (siehe (7) oben) eine *symmetrische* Relation zwischen Ereignissen. Weder die logische Implikation noch die kausale Verursachung sind symmetrische Relationen. Mit Hilfe von Begünstigen kann man viele der üblichen Paradoxa in der Stochastik-Literatur auflösen (siehe [5]), man gewinnt neue Einsichten in bestimmte, dynamische Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, etwa erhält man neue, interessante Deutungen des Kalküls der BAYESschen Formel (siehe dazu [4]). Begünstigen prallt auf inadäquate primäre Intuitionen, eine Aufarbeitung kann daher diese verändern, Begünstigen bietet die Möglichkeit, sich intuitiv in stochastischen Problemen zu orientieren, man kann und soll daher dieses Konzept mit Vorteil im Unterricht von Stochastik thematisieren.

Literatur

[1] M. Bar-Hillel und R. Falk: Some teasers concerning conditional probabilities. Cognition 11 (1982) S. 109 - 122.

[2] H.-J. Bentz: Willkürliche und unwillkürliche implizite Lotterien. MU 29 (1983), S. 41 - 46.

[3] M. Borovcnik: Begünstigen - eine stochastische Intuition. PM 27 (1985), im Druck.

[4] M. Borovcnik: Der Problemkreis Bayessche Formel. mathematica didactica 7 (1984), S. 207 - 224.

[5] M. Borovcnik: Revising probabilities according to new information - a fundamental stochastic intuition. Paper presented at ICME 5, Adelaide, 1984.

[6] R. Ineichen: Stochastik, Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Luzern und Stuttgart: Raeber 1984.

[7] J.M. Shaughnessy: Misconceptions of Probability, systematic and otherwise; teaching Probability and Statistics so as to overcome some Misconceptions. In: D.R. Grey e.a. (eds.): Proceedings of First International Conference on Teaching Statistics. Sheffield: Teaching Statistics Trust 1983, S. 784-801.