DIE STANDARDABWEICHUNG: EINIGE AUSWIRKUNGEN EINES INTUITIVEN ANSATZES

nach F.Loosen, M.Lioen und M.Lacante, Universität Leuven, Belgien

Originaltitel in 'Teaching Statistics' 7(1985) Nr.1 : The Standard Deviation: Some Drawbacks of an Intuitive Approach
Übersetzung: Bernd Wollring

In einem kürzlich erschienenen Beitrag in dieser Zeitschrift erwähnt A.HART (siehe HART), "sie habe es sich zur Gewohnheit gemacht, Studenten aller Stufen danach zu fragen, was eine Standardabweichung ist." Sie beklagt sich darüber, daß die Studenten antworten, dies sei ein Streuungsmaß, und daraufhin eine Formel angeben. Wir sind sogar noch pessimistischer. Wir bezweifeln nämlich, daß die meisten Studenten vor Augen haben, daß die Standardabweichung ein ganz spezielles Streuungsmaß ist, und zwar eines, das angibt, **wie stark die Daten von der zentralen Tendenz abweichen**. Unser Zweifel entstand anhand der vielen Darstellungen, mit denen Lehrbücher den Begriff der 'Variabilität' oder Streuung einführen. Die meisten Einführungen betonen mehr die Verschiedenheit der einzelnen Daten untereinander als ihre Abweichung von der zentralen Tendenz. Ein Beispiel soll dies belegen:

"Eine wichtige Eigenschaft der meisten Datenserien besteht darin, daß ihre Werte im allgemeinen **nicht alle gleich** sind. Vielmehr ist das Ausmaß, in dem sie voneinander abweichen oder untereinander variieren, in der Statistik von grundlegender Bedeutung. Da die Lageparameter über diese Eigenschaft nichts aussagen, werden wir nun weitere Maße betrachten, sogenannte **Streuungsmaße**, die etwas über das

Ausmaß mitteilen, in dem die Daten auseinandergezogen, verstreut oder 'verschieden verteilt' sind " (siehe FREUND).

Im Prinzip kann man den Begriff der Streuung von Beobachtungen sowohl darauf aufbauen, daß man die **Abweichungen der verschiedenen Beobachtungsergebnisse untereinander** betrachtet als auch darauf, daß man den **Unterschied der Beobachtungsergebnisse vom Mittelwert** benutzt (siehe Anmerkung am Schluß). Das bedeutet allerdings nicht notwendig, daß beide Ansätze gleichermaßen als Weg zur Darstellung der Standardabweichung im Unterricht geeignet sind. Auf den ersten Blick ist man geneigt, die Unterschiede der Beobachtungen untereinander als den besseren Einstieg anzusehen, da dies einer intuitiven Begriffsbildung zur Verteilung bereits sehr verwandt ist. Eine Auswirkung dieses Ansatzes besteht jedoch darin, daß diese auf Allgemeinverständlichkeit aufbauende Begriffsbildung ("Variation", "Dispersion", "Verschiedenheit", "Ausbreitung", usw.) für verschiedene Interpretationen offen ist. Es ist zum Beispiel unklar, ob dieser Begriff eine relative oder eine absolute Abweichung bezeichnet.

Mit Hilfe eines kleinen Experiments haben wir versucht, herauszufinden, wie diese Art des intuitiven Ansatzes von den Studenten interpretiert wird. Einer Stichprobe von 154 'Frischlingen' (Psychologische Fakultät), die zuvor keinerlei Kenntnisse von Verteilungen hatten, haben wir jeweils zwei Mengen von Blöcken gezeigt, die mit A und B bezeichnet waren (siehe Bild 1). Die beiden Blöcke der Menge A waren rot lackiert und hatten Höhen von 45cm und 50 cm. Die beiden Blöcke der Menge B waren in gelb gehalten und 5 cm und 10 cm hoch. Die Studenten erhielten folgende Mitteilung: "Dies sind zwei Mengen von Blöcken: eine Menge roter Blöcke und eine Menge mit gelben. Wie Sie sehen, sind die beiden roten Blöcke nicht gleich hoch, ebenso die beiden gelben nicht. In welcher der beiden Mengen sind die Blöcke Ihrer Meinung nach einander am meisten unähnlich ? In welcher Menge haben die Blöcke untereinander die größte Variationsbreite ? Welche Menge zeigt hinsichtlich der Höhe die größten Änderungen, die rote oder die gelbe ? Wenn Ihrer Meinung nach die Unterschiedlichkeit bezüglich der Höhe bei beiden Mengen gleich ist, können Sie gerne auch das als Antwort geben."

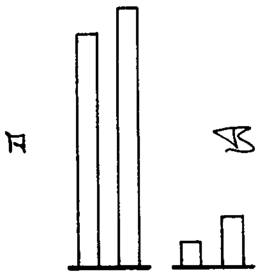

Bild 1

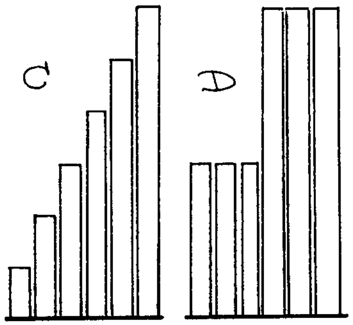

Bild 2

Wir erhielten folgendes Ergebnis : 69% der Studenten meinte, B zeige die größere Variationsbreite, 11% urteilten, daß die Menge A die größere Variationsbreite habe, und nur 20% meinten, die Variationsbreite sei in beiden Mengen die gleiche.

Wir haben derselben Studentengruppe dann die Mengen C und D gezeigt (siehe Bild 2). In der Menge C waren die Blöcke 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm und 60 cm hoch, und in der Menge D betrugen die Höhen 10 cm, 10 cm, 10 cm, 60 cm, 60 cm und 60 cm.

Diesmal gaben die Studenten folgende Antworten: 50% hielten die Unterschiedlichkeit bei C für die größte, 36% meinten, dies sei bei D so, und für 14% von ihnen zeigten beide Mengen dieselbe Variationsbreite.

Geht man von der allgemeinen Bedeutung der Begriffe aus, die in den Formulierungen der Fragen benutzt wurden, so er-

scheint es verständlich, daß viele Befragte die Blöcke der Menge C untereinander für mehr verschieden hielten als die der Menge D, denn keine zwei Blöcke in C haben dieselbe Höhe. In der Menge D dagegen gibt es zwei verschiedene Gruppen von Blöcken, die einen mit 10 cm Höhe, die anderen mit 60 cm. Ebenso ist es keinerlei Überraschung, daß die Studenten die Blöcke in B für einander unähnlicher halten als die Blöcke in A, denn in B ist ein Block doppelt so hoch wie der andere, dagegen sind die Blöcke bei A auf den ersten Blick mehr oder weniger gleich hoch.

Die Ergebnisse dieses kleinen Experiments mit den Mengen C und D führen auf die Annahme, daß die Studenten dazu neigen, den Begriff der Streuung anhand der **Unterschiedlichkeit (unalikability)** zu interpretieren, das heißt sie gehen von gleichartigen Beobchtungen oder Gruppen gleicher Beobachtungen aus. Die Ergebnisse bei den Mengen A und B zeigen zudem, daß die Unterschiedlichkeit der beobachteten Höhen untereinander relativ und nicht absolut beurteilt wird. In jedem Fall messen die Studenten die Streuung der Daten **unabhängig von irgendeinem Bezugspunkt**, etwa dem Mittelwert. Verständlicherweise hat diese intuitive Auffassung der Streuung Auswirkungen, wenn man die Standardabweichung lediglich als Streuungsmaß einführt. Um das zu vermeiden, halten wir es für richtig, die Aufmerksamkeit der Studenten gezielt auf diesen Punkt zu lenken. Wir wollen kurz darstellen, wie wir dabei üblicherweise vorgehen.

Traditionsgemäß stellen wir im Anschluß an das einführende Experiment mit den Block-Mengen, das zu diesem Zeitpunkt nicht speziell kommentiert wird, den Begriff der Streuung anhand der Graphen der Häufigkeitsfunktionen bei den Block-Mengen A, B, C und D vor (siehe Bild 3). Ausgehend von diesen Graphen können die Studenten sehen, daß die Verschiedenheit der Höhen mit Hilfe der Abweichungen vom Mittelwert ausgedrückt werden kann. Ist diese Einsicht erst hergestellt, so vertsehen die Studenten leicht die Formeln der Varianz und der Standardabweichung. Daraufhin werden sie aufgefordert, die Standardabweichung für die Höhen der Blöcke in den Mengen A, B, C und D zu berechnen. Sie entdecken dabei $s_A = s_B$ und $s_C < s_D$.

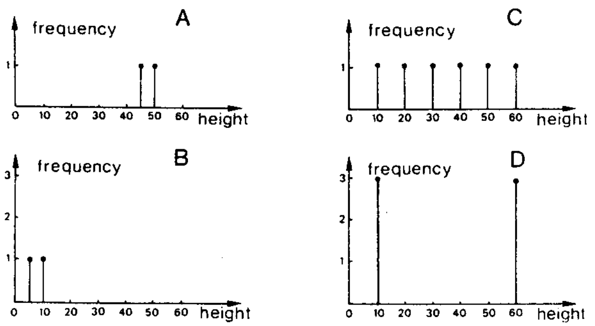

Bild 3

Die Konfrontation dieses Ergebnisses mit dem intuitiven Gefühl für die Streuung, das die Blöcke erzeugen, führt meist zu einem AHA-Erlebnis, bei dem die Studenten spontan einsehen, daß die Standardabweichung ein sehr spezifisches Streuungsmaß darstellt. Nun erst wird das Experiment mit den Blöcken kommentiert. Zusätzlich erläutern wir stets, daß eine Aussage wie $s_C = 18.71$ sehr wenig Information enthält und besser in Form einer Wahrscheinlichkeitsaussage gefaßt wird, wie etwa: "Ein Anteil p der Beobachtungsergebnisse liegt in einem Intervall um den Mittelwert mit Radius k Standardabweichungen." Ist die betreffende Verteilung

bekannt, so kann dieser Anteil unmittelbar berechnet werden. In allen anderen Fällen muß man sich damit zufriedengeben, eine untere Schranke für diesen Anteil mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung zu bestimmen.

Zusammengefaßt: Wir sind der Überzeugung, daß bei der Darstellung der Standardabweichung im Unterricht zwei Dinge streng voneinander zu trennen sind:

(1) die intuitive Auffassung der Unterschiedlichkeit bzw. Streuung und
(2) die spezielle Modellbildung zum Begriff der Streuung, wie sie der Begriff der Standardabweichung darstellt, nämlich ein Maß für die **Abweichung von der zentralen Tendenz.**

Auf den ersten Blick scheint diese Folgerung selbstverständlich zu sein. Undere Erfahrung hat uns allerdings gelehrt, daß viele Studenten (und auch viele andere Leute) diese Unterscheidung nicht wahrnehmen, wenn ihnen nicht ein Experiment wie das mit den Blöcken die Augen öffet.

Literatur

FREUND,J.E.: Modern Elementary Statistics .- London: Prentice Hall 1974[4] , S.63

HART,A.E.: How Should We Teach the Standard Deviation ? .- Teaching Statistics 6(1984) Nr.1 ; Übersetzung in diesem Heft

Anmerkung

Diese Tatsache (s.o.) liegt darin begründet, daß die Standardabweichung proportional zur Wurzel aus dem Mittelwert der Differenzenquadrate zu allen Beobachtungspaaren ist :

$$s_x^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \frac{(x_i - x_j)^2}{\binom{n}{2}}$$

Vergleiche hierzu auch :

SEBER, G.A.S.: Elementary Statistics .- New York: Wiley , S. 17-19

KENDALL, M.G.; STUART,A.: The Advanced Theory of Statistics. Volume 1 .- London: Griffin, 1977[4], S.48

YULE, G.U.; KENDALL, M.G.: An Introduction to the Theory of Statistics .- London: Griffin 1965[14], S.146-147