DIE PLANUNG VON EXPERIMENTEN - DARGESTELLT ANHAND VON WIEGEBEISPIELEN

nach D.WILKIE, Windscale

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol. 8 (1986), Nr. 2:
Design of Experiments Illustrated by Weighing
Übersetzung: G.Scheu

Zusammenfassung: Anhand eines einfachen Wiegebeispiels (3 Gegenstände) werden verschiedene Experimente vorgestellt und diskutiert. Dem klassischen Experiment entspricht die Mittelwertbildung von Meßwerten. Beim multiplikativen Experiment werden alle Kombinationen der Meßwerte gebildet. Wenn alle Kombinationen zuviel Zeit beanspruchen, dann wird nur ein Bruchteil (z. B. die Hälfte, ein Viertel) der Messungen durchgeführt. Es kann dann sein, daß verschiedene Größen nicht mehr unterscheidbar sind. Diese Experimente heißen Experimente mit Brüchen. Bei gemischten multiplikativen Experimenten sind einige Messungen systematisch verfälscht, und es werden die Größen berechnet, die von diesem Fehler unabhängig sind. Wird die Anzahl der Messungen zu groß, so werden diese in Form eines lateinischen Quadrates angeordnet. Zusammenfassend wird gezeigt, daß das multiplikative Experiment, egal in welcher Form, den anderen Versuchsdurchführungen überlegen ist, weil es effizienter ist und mehr Möglichkeiten der Berechnug bietet.

ZDM-Klassifikation: K40

Es sollen 3 Gegenstände A, B, C (z. B. apple (Apfel), banana (Banane), carrot (Karotte)), deren Gewichte mit a, b, c bezeichnet sind, gewogen werden. Dies kann mit einer gewöhnlichen haushaltsüblichen Federwaage geschehen, deren Auslenkung mit einer Skala geeicht ist oder mit einer Balkenwaage, wobei der Gegenstand sich auf der einen Seite und das bekannte Gewicht sich auf der anderen Seite befindet. Meßfehler können durch Reibung in der Feder oder im Drehpunkt des Balkens oder beim Ablesen der Skala oder der Bestimmung des Gleichgewichtzustandes auftreten. Allgemein hängen diese Fehler von der Feder- oder Balkenwaage, nicht aber von der Größe des Gewichts des Gegenstandes ab.

Es gibt verschieden Möglichkeiten die Gewichte zu bestimmen.

Klassisches Experiment

Bei einem klassischen Experiment werden jeweils nur ein Faktor oder eine Variable geändert, während die anderen Variablen

konstant bleiben. D. h. bei der obigen Aufgabe, daß die Gleichgewichtslage bestimmt und dann jeder Gegenstand der Reihe nach gewogen wird. Das sind zusammen vier Messungen. Dieser Vorgang wird wiederholt, um eine Fehlerabschätzung zu erhalten. Das sind zusammen acht Messungen, deren Werte mit o_1, a_1, b_1, c_1, o_2, a_2, b_2, c_2 bezeichnet werden.

Damit gilt

$$\text{Gewicht von A} = \frac{(a_1 - o_1) + (a_2 - o_2)}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{o_1 + o_2}{2}$$

= Differenz der Mittelwerte zweier Meßwerte.

Analoge Formeln gelten für das Gewicht von B und C.

Das Tauschen der Werte o_1 und o_2 erzeugt keine unabhängige Schätzung des Gewichts der Gegenstände.

Multiplikatives Experiment

Mit einem multiplikativen Experiment werden alle Kombinationen der Faktoren und Stufen getestet. Die Faktoren bei der obigen Aufgabe sind die Gegenstände A, B und C. Die Stufen sind "ohne Gegenstände" (Stufe 0) und "mit Gegenständen" (Stufe 1).

Folgende Kombinationen sind möglich

A_0	B_0	C_0	=	o
A_1	B_0	C_0	=	a
A_0	B_1	C_0	=	b
A_1	B_1	C_0	=	ab
A_0	B_0	C_1	=	c
A_1	B_0	C_1	=	ac
A_0	B_1	C_1	=	bc
A_1	B_1	C_1	=	abc

Das Gewicht von A ist durch jede der 4 Differenzen a - o, ab - b, ac - c, abc - bc und deshalb auch durch den Mittelwert

$$\frac{(a + ab + ac + abc) - (o + b + c + bc)}{4}$$

gegeben, d. h. durch die Differenz der Mittelwerte von 4 Meßwerten, d. h. durch die doppelte Anzahl von Werten im Vergleich zum klassischen Experiment, obwohl die Anzahl der Messungen gleich geblieben ist.

Analoge Formeln gelten für die Gewichte B und C, z. B.

$$\text{Gewicht von C} = \frac{(abc + bc + ac + c) - (ab + b + a + o)}{4}$$

Auf diese Weise werden alle 8 Meßwerte zur Bestimmung jedes Gewichtes benutzt.

Wenn ab ungleich a + b ist, dann entspricht die Differenz entweder einem Effekt plus Fehler oder nur einem Fehler. Bei der obigen Aufgabe mit Apfel, Banane und Karotte entspricht der Differenz einem Meßfehler, da hier keine chemischen Reaktionen oder physikalischen Wechselwirkungen stattfinden. Aber wenn eine Reaktion stattgefunden hat, so daß das gemeinsame Gewicht nicht die Summe der einzelnen Gewichte ist, z. B. Salz und Wasser, wobei das entstandene Gas entweicht, dann wird das Gewicht mit der folgenden Formel berechnet:

$$\text{Interaktion AB} = \frac{1}{4}\,[(abc - ac) - (bc - c) + (ab - a) + (b - o)]$$
$$= \frac{1}{4}\,[d_2 + d_1],$$

d. h. als Mittelwert zweier Differenzen, wobei d_1 und d_2 in der Abbildung 1 dargestellt sind und der Faktor $\frac{1}{4}$ willkürlich ist.

Analoge Formeln gelten für die Interaktionen BC und AC.

Die Interaktion ABC kann definiert werden als die Änderung der Interaktion AB bei der Stufe 1 von C, d. h. als Differenz von d_1 und d_2 und wird mit folgender Formel berechnet:

$$\text{Interaktion ABC} = \frac{1}{4}\,[(abc - ac) - (bc - c) - (ab - a) + (b - o)]$$
$$= \frac{1}{4}\,[d_2 - d_1]$$

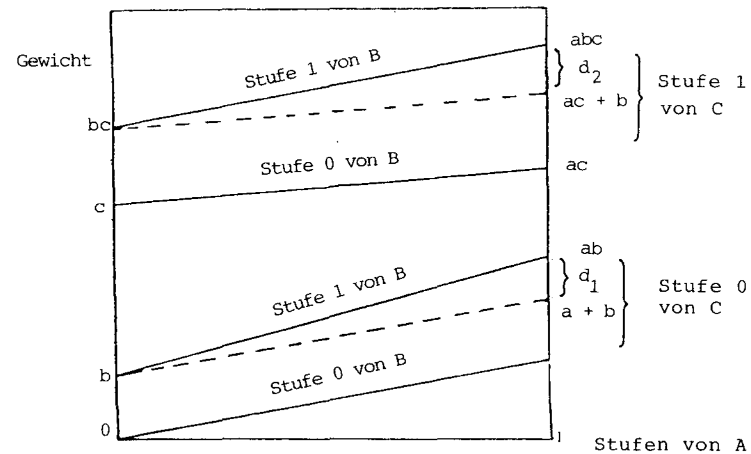

Abbildung 1

Deshalb gibt das multiplikative Experiment für ein Experiment in dem keine Interaktionen stattfinden, verschiedene Interaktionsterme zur Fehlerberechnung. In einem Experiment, in dem Interaktionen auftreten, kann nur das multiplikative Experiment die Interaktionen berechnen. Bei einem komplexeren, als dem vorgestellten Experiment, können komplexere Interaktionen zur Fehlerberechnung benutzt werden, um die Interaktionen und die Fehler zu berechnen. Bei dem beschriebenen Beispiel ist die Interaktion ABC, berechnet durch die Differenz $d_2 - d_1$, kleiner als die Interaktion AB, berechnet durch die Summe $d_2 + d_1$. Diese Differenz ist deshalb nur eine Abschätzung für den Fehler allein.

Multiplikatives Experiment mit Brüchen

Wenn ein ganzes multiplikatives Experiment zuviel Zeit oder Geld beansprucht, dann kann ein Bruchteil der Messungen, z. B.

die Hälfte oder ein Viertel, brauchbare Information erzeugen.

Angenommen es werden nur die Hälfte der Messungen durchgeführt, z. B. abc, c, b, a.

Dann ist das Gewicht von C = $\left[(abc + c) - (b + a)\right] / 2$. Leider wird die Interaktion AB auch mit denselben Meßwerten berechnet, so daß C mit AB verwechselt werden kann. Wenn beide Größen auftreten, können die beiden verschiedenen Größen nicht getrennt werden. Wenn die Interaktion AB nicht vorhanden ist, dann berechnet sich die Größe C mit der Hälfte der Meßwerte und mit der gleichen Genauigkeit wie mit dem klassischen Experiment, d. h. die Genauigkeit hängt von der Anzahl der Meßwerte ab, die benutzt werden.

Analoge Aussagen gelten für die Gewichte von A und B, die mit den Interaktionen BC und AC verwechselt werden können.

Gemischtes multiplikatives Experiment

Angenommen, die Hälfte der 8 Messungen wurde mit einer Waage und die andere Hälfte mit einer anderen Waage gemessen, die einen systematischen Fehler X hat.

Mit der Waage 1 wurden o, a, b, ab und mit der Waage 2 wurden c, ac, bc, abc gemessen. Deshalb bedeuten die Messungen mit der Waage 2 folgende Meßwerte c + X, ac + X, bc + X. Damit ist das

$$\text{Gewicht von A} = \frac{(a+ab+ac+X+abc+X) - (o+b+c+X+bc+X)}{4}$$

unabhängig vom Fehler X.

Eine analoge Formel gilt für das Gewicht von B, aber nicht von C

$$\text{Gewicht von C} = \frac{(abc+X+bc+X+ac+X+c+X) - (ab+b+a+o)}{4}$$

$$= c + X,$$

d. h. das Gewicht von C wird durch die unterschiedlichen beiden Waagen verfälscht.

Wenn jedoch die Messungen o, ab, c, abc mit der Waage 1 und die Messungen a, b, ac, bc (alle vier mit dem Fehler X) mit der Waage 2 durchgeführt werden, dann sind die Gewichte von A, B, C alle unabhängig von X. Stattdessen wird die Interaktion AB vom Fehler X verfälscht. Wenn aber AB für das Experiment unwichtig oder Null ist, ist dies unerheblich. Ferner haben die Gewichte von A, B, C kleinere Fehler, als wenn die Messungen zufällig mit den beiden Waagen durchgeführt worden wären. Das ist der Sinn und Zweck der gemischten Experimente. Wenn nicht alle Messungen unter den gleichen Bedingungen durchgeführt werden können, dann sollte das Experiment in Blöcke mit gleichen Bedingungen unterteilt (jede Waage mit den 4 Messungen bildet einen Block) und die Messungen den Blöcken so zugeordnet werden, daß die wichtigen Effekte nicht durch die Bildung der Differenzen aus den verschiedenen Blöcken verfälscht werden.

Lateinische Quadrate

Wenn es n Faktoren mit je p Stufen gibt, dann benötigt das ganze multiplikative Experiment p^n Messungen. Das lateinische Quadrat benötigt dagegen nur p^2 Messungen, da die Messungen in Form eines Quadrates angeordnet sind, wobei vorausgesetzt wird, daß Interaktionen zwischen Faktoren nicht existieren (was für die meisten Wiegeprobleme zutrifft).

Bei 3 Faktoren mit 2 Stufen ergeben sich also $2^3 = 8$ Messungen für das multiplikative Experiment und $2^2 = 4$ Messungen für das lateinische Quadrat.

Gegeben sei ein Beispiel (siehe Abbildung 2), wobei Stufe 0 "ohne Gegenstand" und Stufe 1 "mit Gegenstand" bedeutet. Damit müssen die Messungen $A_0B_0C_0$, $A_1B_0C_1$, $A_1B_1C_0$, $A_0B_1C_1$, d. h. o, ac, bc, ab durchgeführt werden.

Abbildung 2

	Faktor A	
	0	1
	Faktor C	
0	0	1
Faktor B		
0	1	0

Dies bedeutet nur eine "halbe" Durchführung des multiplikativen Experiments. Es ist genau die komplementäre "halbe" Durchführung zum beschriebenen Experiment und verfälscht deshalb die gleichen Effekte.

Aus

$$C = \frac{(abc + bc + ac + c) - (ab + b + a + o)}{4}$$

wird

$$C = \frac{(bc + ac) - (ab + o)}{2},$$

und aus

$$AB = \frac{(abc + c + ab + o) - (ac + bc + a + b)}{4}$$

wird

$$AB = \frac{(ab + o) - (ac + bc)}{2},$$

d.h.

$$C = -AB .$$

Zusammenfassung

Das multiplikative Experiment ist sowohl in seiner vollständigen Form (vorzugsweise in der gemischten Version) als auch in seiner Form mit Brüchen (Bruchteile, falls die Größe des Experiments ausschlaggebend ist), anderen Versuchsanordnungen überlegen, weil es effizienter ist und weil damit Interaktionen berechnet werden können.

Die rechnerische Durchführung der Experimente ist in den Lehrbüchern beschrieben. Eine besonders einfache Methode für 2^n Experimente (d.h. n Faktoren mit je 2 Stufen) wird von YATES (Literaturhinweis 1 und Lehrbücher) vorgeschlagen. Diese Methode wurde auf Faktoren mit beliebiger Anzahl von Stufen erweitert.

Literatur

YATES, F.: The design and analysis of factorial experiments. Harpenden, England: Commonwealth Bureau of Soils, 1937.

WILKIE, D.: A method of analysis of mixed level factorial experiments. In: App. Statistics, Vol. 11 (1962) Nr. 3, S. 184 - 195.