

ÜBER DIE FRAGE, WARUM NACH EINER "6" BEIM WÜRFELN  
DIE ANDEREN AUGENZAHLEN NICHT WAHRSCHEINLICHER FALLEN WERDEN

von HANS G. SCHÖNWALD, Siegen

ZDM-Klassifikation: K50

Der Mensch besitzt intuitiv ein Empfinden für elementare Wahrscheinlichkeitssituationen. Daß z. B. beim Würfeln alle Augenzahlen auf lange Sicht gesehen etwa gleich oft fallen werden, ist jedem aufgrund der intuitiv empfundenen Symmetrie ohne weitere begründende Erklärung einsichtig. Und wenn umgekehrt bei einem Würfel die Augenzahl 6 "wirklich" häufiger auftritt, dann nimmt man an, daß der Würfel unsymmetrisch ist; die Wirklichkeit einer höheren Häufigkeit ist durch Würfeln nie absolut begründbar, man nimmt sie aber gern an, wenn eine lange Reihe von Würfeln dies nahelegt, d. h. viel wahrscheinlicher erscheinen läßt als die Symmetrie des Würfels.

Dies natürliche Verständnis bewirkt aber auch eine Täuschung: Wenn die erste Augenzahl gefallen ist, meint man, daß nun die anderen eher "dran" seien. Es gibt durchaus Lotto- und Roulette-spieler, die entsprechende Spielstrategien gern verwenden. Und scherzhaft wird gelegentlich gefragt, ob man in einem Flugzeug, in dem bereits eine Bombe entschärft wurde, sicherer sei, falls bei jedem Flug mit 0,01 % Wahrscheinlichkeit ein Bombenattentat verübt wird. Diese Art von Fehlvorstellungen ist allgemein weit verbreitet und tritt im Stochastikunterricht gelegentlich zutage. Da die angesprochene, fälschliche Ahnung intuitiv-emotional begründet ist, wird eine rationale Gegenüberlegung nur teilweise überzeugen. Deshalb wird die rationale Begründung hier in mehrere Richtungen hin möglichst intuitionsnah ausgemalt. Vielleicht kann der Lehrer diese stochastische Täuschung bei seinen Schülern auflösen und überwinden, wenn er ihnen vielerlei Erklärungen nebeneinander darlegt. Er hüte sich aber davor, diese Erklärungen

exaktifizieren zu wollen; dann würde er die Schüler wieder auf rationaler Ebene ansprechen. Die didaktische Absicht muß vielmehr sein, das Zentrum des emotionalen Widerstandes der Schüler zu erahnen, anzusprechen und ihnen unbegründet, witzlos werden zu lassen. Dies gelingt weniger durch rationale Essenzen und stärker durch mehrmaliges, immer wieder neues Auf-den-Schüler-Eingehen. Die folgenden Ausführungen sollen den Lehrer darauf einstimmen; dem rational betonten Leser werden sie ziemlich redundant erscheinen.

Ein mathematisches Wahrscheinlichkeitsmodell ist in folgender Weise eine Umkehrung der Erfahrung: Als Grenzwert "aller" Erfahrungen ist sie jeder einstweiligen Erfahrung schon voraus, und jeder gegenteilige Augenschein wird als vorläufig und speziell erfahren gedeutet (vom Modell her gesehen) bzw. geglaubt (gemäß der natürlichen Verarbeitung solcher Erfahrung).

Das mathematisch abstrakte Modell für das Würfeln (mit einem Hexaeder), als Gleichwahrscheinlichkeit über einem 6-elementigen Elementarereignisraum bezeichnet, wird dadurch auf die konkrete Wirklichkeit bezogen, daß die relativen Häufigkeiten bei einer "Stichprobe" von endlich vielen wirklichen Würfeln der idealisierten Verteilung in der Regel desto näher kommt, je umfangreicher die Stichprobe ist. Mit dieser Handhabung des Theorie-Praxis-Zusammenhangs kann ein angewandter Mathematiker ganz gut auskommen. Dabei wird "unendlich" in doppelter Weise durch "sehr viele" ersetzt, theoretisch stellvertretend und praktisch approximierend. Einerseits kommt man der theoretischen Verteilung durch die praktisch gefundenen Häufigkeiten nahe, und andererseits nimmt man einzelne Ausnahmen dieser Regel hin. [Diese Formulierungen sollen die übliche mathematische Hochsprache nicht äquivalent ersetzen; sie sollen vielmehr beim Erlernen zwischen der mathematischen und der alltagsgemäßen Beschreibung des Problems vermitteln.]

Wenn im ersten Wurf eine "6" fällt, kann man sich vor Augen halten, daß dies nur ein Wurf in einer möglicherweise noch langen Reihe von Würfeln ist. In einer solchen muß ja nicht

jede Augenzahl genau gleich oft auftreten; dagegen sträubt sich keine Emotion. Und mit irgendeiner Augenzahl muß ja jede Reihe beginnen. Ferner heißt die Gleichwahrscheinlichkeit der sechs Augenzahlen nicht, wie man es sich so gern halbdeutlich vorstellt, daß bei je sechs Würfeln die sechs Augenzahlen in irgendeiner Reihenfolge auftreten. Vielmehr sollte man bedenken: Wenn man zu einem Sechstel aller Ausgänge, das selbst (fast?) unendlich viele Ausgänge umfaßt, noch einen hinzufügt, wird diese Teilmenge nicht (relativ bzw. kaum) größer; man kann dies damit vergleichen, daß nicht weniger Wasser im Meer ist, wenn man einen Eimer daraus schöpft.

Der Schüler, dem dies (rational) einleuchtet, wird (emotional) geneigt sein gegenzufragen, wie es denn mit drei "6en" gleich hintereinander sei; mit drei gleichen Augenzahlen müsse eine Reihe ja nicht beginnen. Einerseits, kann man antworten, ist es sehr unwahrscheinlich, daß niemals gleiche Augenzahlen aufeinander folgen; also weshalb nicht auch am Anfang? Andererseits kommt (6,6,6) als eine unter 216 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten des Anfangstripels vor; und mit einem dieser muß die Reihe ja beginnen.

Bei den bisherigen Überlegungen hat man sich doch eher als Betrachter in einen Zeitpunkt vor dem Würfeln versetzt und die ganze Versuchsreihe vor sich gesehen. Man kann aber auch die "6" bzw. die "6en" für sich allein betrachten und sich in Gedanken an den Zeitpunkt unmittelbar danach begeben. Dann bleibt entweder als (gedankliche) Möglichkeit, dies als geschehen und unabänderbar anzusehen und zu sagen: "Alea jacta sunt." Dann ist keine Wahrscheinlichkeitstheorie mehr sinnvoll, da sich jegliche Prognose erübrigt. Mit anderen Worten: Wenn erst einmal etwa eine "6" gefallen ist, ist an diesem Ergebnis nichts mehr zu ändern; und bei den noch durchzuführenden Würfeln wird der Würfel von dieser "6" nichts wissen. Für die Wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage liegt wieder dieselbe Situation vor, wie vor dem Fallen der "6". Oder man sieht diese Würfe als eine Stichprobe aus der Menge aller denkbaren Würfe. Dies gelingt,

da man sich nun nicht auf ein konkretes Werfen, das man vorhat, einzuschränken braucht; man kann leichter verallgemeinern, weil man ja sowieso schon davon absieht, daß garnicht mehr mehrere Möglichkeiten offenstehen.

Außerdem kann man sich noch vor Augen halten, daß bei endlich vielen Experimenten die in etwa "richtige" Anzahlen von Ausgängen nur mit einer zwar hohen, aber doch nicht 100 %igen Wahrscheinlichkeit eintreten werden. Dies entspricht umgangssprachlich dem Gesetz der großen Zahl. Jeder sehr unwahrscheinliche Ausgang, bei einem einfachen Wurf ebenso wie bei jedem mehrfachen Werfen, besitzt doch noch eine gewisse geringe Wahrscheinlichkeit. Durch diese Überlegung weicht man die sich gern verfestigende Vorstellung einer irgendwie im Großen exakten "Einhaltung" der Erwartungswerte auf; dabei bedeutet "im Großen", daß sehr viele, aber eben doch nur endlich viele Ausgänge von Experimenten beobachtet werden. Und nun werden in "besonderen" Situationen Abweichungen von den Erwartungswerten durchaus wahrscheinlich, aber eben lediglich in seltenen Fällen.