# WAHRSCHEINLICHKEIT IM EINHEITSQUADRAT

von ALAN M. SYKES

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol. 10 (1988), No. 2:
Probability and the Unit Square

A. M. Sykes lehrt am University College of Swansea, Wales

Übertragung: I. Strauß, Kronberg im Taunus

Zusammenfassung: Auf dem Stichprobenraum des Einheitsquadrates werden verschiedene geometrisch interpretierbare Zufallsgrößen betrachtet. Über den analytischen Zusammenhang zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion gelangt man zu Berechnungsmöglichkeiten für den Erwartungswert und die Varianz. Die aufgezeigte Methodik erfordert Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung, wendet sich also an Schüler der Sekundarstufe II.

ZDM-Klassifikation: K64

## EINLEITUNG

Die mathematische Struktur von Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus statistischen Überlegungen ist recht komplex. Schüler reagieren auf Begriffe wie Dichtefunktion und Kumulierte Dichtefunktion (= Verteilungsfunktion), Mittelwert und Varianz und deren Beziehungen untereinander verwirrt. Sorgfältig ausgewählte Übungen sind hilfreich, und sie sind besonders instruktiv, wenn ihre Vielfalt einen leicht zu verstehenden gemeinsamen Ausgangspunkt hat.

"Wähle einen Punkt zufällig in einem Quadrat aus" ist solch ein einfaches statistisches Experiment. Durch den Einsatz von Computern kann dieser Vorgang problemlos demonstriert werden. Im folgenden werden wir zeigen, wieviel an elementarer Theorie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen in diesem Rahmen erarbeitet werden kann. Gleichzeitig beleuchten wir die bei den Schülern aufgetretenen Schwierigkeiten in der Hoffnung, daß auch die Leser für unsere Anregungen empfänglich sind!



## DAS EINHEITSQUADRAT ALS STICHPROBENRAUM

Wir betrachten das Quadrat mit den Eckpunkten (0,0) (0,1) (1,0) und (1,1). Ein zufällig ausgewählter Quadratpunkt möge die (Zufalls-)Koordinaten X,Y haben. Unter zufällig verstehen wir, daß die Wahrscheinlichkeit für den Zufallspunkt, in einer bestimmten Region des Quadrates zu liegen, proportional zum Flächeninhalt dieser Region ist (daß also, da die Fläche das Maß 1 hat, der Punkt in jedem Fall zu dieser Fläche gehört).

Warum benutzen wir diesen Stichprobenraum? Sollte man für die Schüler eine Motivation benötigen, betrachte man das bekannte Rummelplatz-Spiel, bei dem eine Münze vom Durchmesser d auf eine Fläche mit Quadraten der Seitenlänge 1 geworfen wird. Alternativ kann man folgendes Problem ansprechen: Zwei Freunde verabreden, sich zufällig innerhalb einer festgelegten Zeitspanne von einer Stunde zum Lunch in einem bestimmten Café zu treffen; sie warten aber nur höchstens 15 Minuten aufeinander. Beide Einkleidungen führen auf interessante Fragestellungen, und in beiden Fällen repräsentiert das Einheitsquadrat den korrekten Stichprobenraum.

## WAHRSCHEINLICHKEITEN UND ZUFALLSGRÖSSEN

Unser Stichprobenraum liefert sofort die beiden Zufallsgrößen X und Y. In einem ersten Schritt müssen die Schüler Fragen über die Wahrscheinlichkeit von X und Y, die durch geeignete Gebiete des Einheitsquadrates und deren Flächeninhalte vorgegeben sind, beantworten.

Die Berechnung von $P(X<1/2)$ $(=1/2)$ basiert auf der Einsicht, daß das Ereignis $X<1/2$ mit all den Punkten korrespondiert, die links der Linie $x=1/2$ liegen. Man beachte, daß, wie so häufig in der Statistik, die Funktionsbeziehung invers angewandt wird. (Die Zufallsgröße X ist strenggenommen eine Funktion, die einen Punkt (x,y) auf X abbildet; doch das wirklich Wichtige ist die Möglichkeit, die Funktion quasi rückwärts zu benutzen, indem man die Punktmengen (x,y) so bestimmt, daß $X(x,y)<1/2$ gilt.) Ich fürchte, daß dieser funktionale Aspekt innerhalb der Stochastik selbst in der Sekundarstufe II nur unzureichend Beachtung findet.

Typische Übungen könnten sein:

(i) $P(X<1/2)$
(ii) $P(Y>3/4)$
(iii) $P(X<1/2 \text{ UND } Y>3/4)$.

Die Schüler finden die Lösungen ohne Schwierigkeiten und können dann veranlaßt werden zu untersuchen, ob die Beziehung Antwort (iii) = Antwort (ii)·Antwort (ii) ein Zufall ist oder nicht.
(Man gelangt von hier aus zur Unabhängigkeit von Zufallsgrößen.)

Das Schöne an Zufallsgrößen ist, daß sie sich prima vermehren! Die gängigen arithmetischen Operationen können auf demselben Stichprobenraum auch auf die Zufallsgrößen angewandt werden. Es folgen einige Beispiele und naheliegende Berechnungen dazu, die jeweils von einer Skizze der passenden Punktmenge des Stichprobenraumes begleitet sein sollten.

| | |
|---|---|
| (a) $S = X + Y$, | $P(S<1/2) = 1/8$ |
| (b) $D = X - Y$, | $P(D<1/2) = 7/8$ [1] |
| (c) $M = XY$, | $P(M<1/2) = 1/2 + 0.5 \ln 2$ [2] |
| (d) $R = Y/X$, | $P(R<2) = 3/4$ |
| (e) $L = \min(X,Y)$, | $P(L<1/2) = 3/4$ |
| (f) $U = \max(X,Y)$, | $P(U<1/2) = 1/4$ |

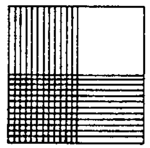
Jedes dieser Beispiele könnte Schwierigkeiten bereiten. Eine generelle Schwierigkeit ist wohl der Umgang mit Ungleichungen. Abgesehen von den Antworten zu (i), (ii) und (iii) scheuen sich Schüler oft, Ungleichungen zu betrachten; sie müssen über den Grenzgraphen zur gewünschten Punktmenge hingeführt werden. Doch nicht immer garantiert diese Vorgehensweise den Erfolg. Wendet man dieses Hilfsmittel auf (b) an, verleitet das die Schüler häufig zur Betrachtung des falschen Gebietes! (Ich empfehle, einige Punktekoordinaten in die Ungleichung einzusetzen.)[1]

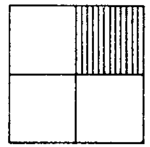


Frage (c) gebiert aus gleichem Grunde Probleme, und zusätzlich muß die Rechnung in zwei Teile aufgespalten werden, die mit dem Rechteck $X \leq 1/2$ und der Fläche unter der Hyperbel $y = 1/2x$ von 1/2 bis 1 korrespondieren.[2]

Frage (d) scheint nur einfacher als (c) zu sein, da Widerstand gegen die Umformung von $Y/X<1/2$ zu $Y<0.5X$ auftritt.[3]

Die beiden letzten Aufgaben dürften besondere Irritation hervorrufen, wohl weil Schüler den Umgang mit Maximum und Minimum als einer binären Operation nicht gewöhnt sind. Doch sind es fruchtbare Fragen, da sie direkt mit dem Axiom der Addition von Wahrscheinlichkeiten in Verbindung stehen. Das Ergebnis von $P(L<1/2)$ ist natürlich (?) gleich dem von $P(X<1/2 \text{ ODER } Y<1/2)$, während $P(U<1/2) = P(X<1/2 \text{ UND } Y<1/2)$ ist. Also kann (f) leicht beantwortet werden, wenn man die Unabhängigkeit von X und Y heranzieht. Ebensogut kann man über das Gegenereignis mit $P(L>1/2) = P(X>1/2 \text{ UND } Y>1/2)$ gehen. Diese zwei Berechnungsmöglichkeiten von (e) sind hier nochmals, zusammen mit den entsprechenden Diagrammen, ausgeführt.





$$\begin{aligned} P(L<1/2) &= P(X<1/2 \text{ ODER } Y<1/2) \\ &= P(X<1/2) + P(Y<1/2) \\ &\quad - P(X<1/2 \text{ UND } Y<1/2) \\ &= 1/2 + 1/2 - 1/2\cdot 1/2 \\ &= 3/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(L>1/2) &= P(X>1/2 \text{ UND } Y>1/2) \\ &= P(X>1/2)\cdot P(X>1/2) \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

$$P(L<1/2) = 3/4$$

VERTEILUNGEN UND DICHTEN

Ist der Stichprobenraum explizit bekannt, läuft der Weg über die Zufallsgrößen so:

(i) Man berechne $F_W(s) = P(W \leq s)$ für alle relevanten s.

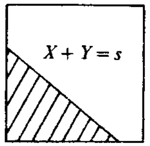
(ii) Man berechne $f_W(s) = \frac{dF_W(s)}{ds}$.

(iii) Man berechne E(W) und Var (W) mittels Integralrechnung unter Benutzung von $f_W(s)$.

(ii) und (iii) werden rein mechanisch ausgeführt und beinhalten gewöhnlich keine Schwierigkeiten, im Gegensatz zu (i)!

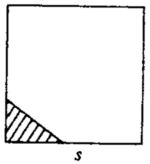
Die Einführung einer Variablen (hier s) scheint begriffliche Komplikationen heraufzubeschwören. Problemlos berechnen Schüler $P(X \leq 1/4)$, $P(X \leq 1/3)$, $P(X \leq 3/4)$ usw., werden aber leicht aus der Fassung gebracht bei $P(X \leq s)$ mit $0 \leq s \leq 1$.

Sehr oft liegt die Schwierigkeit darin, daß der Zusatz "für alle relevanten s" nicht beachtet wird. Nehmen wir beispielsweise die Verteilung von S = X + Y. Hier eine typische Lösung:[4)]

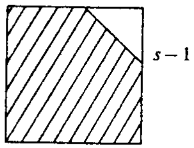



$$P(X+Y \leqslant s) = \frac{s^2}{2}$$

Doch kann X + Y Werte zwischen 0 und 2 annehmen, d. h. der Berechnungsterm hängt von s ab, je nachdem, ob s kleiner oder größer 1 ist. Vollständig sieht das so aus:




$$P(X+Y \leqslant s) = \frac{s^2}{2} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1$$




$$P(X+Y \leqslant s) = 1 - \frac{(2-s)^2}{2} \qquad 1 \leqslant s \leqslant 2$$



Typisch ist die Reaktion: "Wie kann man zwei Antworten zu einer Frage erhalten?"[5)]

Die Unruhe steigert sich, wenn man vorschlägt, die kumulierte Dichtefunktion zu differenzieren, um die Dichtefunktion zu finden und daraus Mittelwert und Varianz zu bestimmen. Das Integral muß in zwei unterschiedliche Integrale aufgespalten werden:

$$E(X+Y) = \int_0^1 s.s.\,ds + \int_1^2 s.(2-s)\,ds = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} = 1$$

(Natürlich ist dies eine Konsequenz aus E(X+Y) = E(X) + E(Y) und trivial für E(X) = E(Y) = 1/2.)

Man führe das Beispiel unbedingt weiter, um zu zeigen, daß Var (X+Y) = 1/6 = Var (X) + Var (Y). (Die Richtigkeit der Gleichung folgt aus der Unabhängigkeit von X und Y.)

Genauso instruktiv ist es, sich durch die anderen obigen Aufgaben hindurchzuarbeiten.

Zum Beispiel: $P(L \leq s) = 1 - (1-s)^2, \quad 0 \leq s \leq 1$

$f_L(s) = 2(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1$

($f_L(s)$ ist die Dichtefunktion von L.)

Man unterlasse nicht herauszuarbeiten, daß der Graph von $f_L$ verdeutlicht, daß kleine Werte von L wahrscheinlicher sind als große, was keine Überraschung ist, da L das Minimum von zwei Zufallswerten ist.

Wegen E(L) = 1/3 muß weiterhin E(U) = 2/3 sein, da gilt:

L + U = X + Y und E(L) + E(U) = E(L+U) = E(X+Y) = 1.

Wenn es die Zeit erlaubt, lasse man die Schüler Var (L) und Var (U) berechnen. Dann ist leicht nachzuprüfen, daß

Var (L) + VAR (U) $\neq$ Var (L+U) = Var (X+Y) = 1/6.

Damit haben wir demonstriert, daß das Gesetz

$$\mathrm{Var}\ (X_1+X_2) = \mathrm{Var}\ (X_1) + \mathrm{Var}\ (X_2)$$

für die korrelierten Variablen L und U nicht gilt, sondern nur für die unabhängigen Zufallsgrößen X und Y.

Wie steht's mit M = XY? Die Berechnung der Dichte von M ergibt[6)]

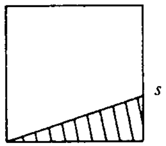
$$P(M \leq s) = s + \int_s^1 \frac{s}{x}\,dx = s - s\log_e s$$

$$f_M(s) = \frac{d}{ds}(s - s\log_e s) = -\log_e s \qquad (0 \leq s < 1)$$

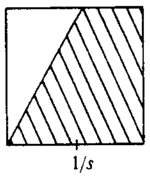
und schließlich E(M) = 1/4. Natürlich muß dies die Antwort sein, denn X und Y sind unabhängig, also ist E(XY) = E(X)E(Y).

Bleibt noch R = Y/X zu besprechen. Gilt E(R) = 1? (Argumentation: E(R) "=" E(Y)/E(X) = 1). Ein nachdrückliches Nein!

Tatsächlich ist der Erwartungswert von R unendlich groß, was nicht schwer zu überprüfen ist, vorausgesetzt, die richtige Dichtefunktion wurde zugrundegelegt. (Man beachte die Ausführungen zu S = X + Y!)




$$P(Y/X \leq s) = P(Y \leq sX) = s/2 \qquad 0 \leq s \leq 1$$




$$P(Y/X \leq s) = 1 - \frac{1}{2s} \qquad 1 \leq s < \infty$$



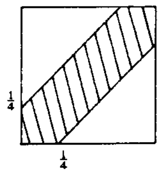
Dies war eine tour de force durch verschiedene Berechnungsweisen bei einfachen Zufallsgrößen, betrachtet im Einheitsquadrat. Die Beispiele sind gleichermaßen instruktiv für Schüler wie für Lehrer. Ich hoffe, dies anhand einiger Aspekte der Theorie von Verteilungen und Erwartungswerten gezeigt zu haben. Besonderen Nachdruck lege ich auf den methodischen Weg

Wahrscheinlichkeit → kumulierte Dichtefunktion (Verteilungsfunktion) → Erwartungswert,

was möglich ist, wenn man einen einfachen Stichprobenraum nimmt, der aber reichhaltige Problemstellungen gestattet - eben das Einheitsquadrat.

## EIN SCHLUSSBEISPIEL

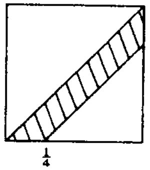
Zu guter Letzt kehren wir zu dem Problem "Treffen zweier Freunde" zurück. A und B seien sie genannt. Wir nehmen an, daß A zum Zeitpunkt X (gemessen in Stunden, $0 \leq X \leq 1$) und B zum Zeitpunkt Y ankommt. Üblicherweise berechnet man die Wahrscheinlichkeit, daß sich beide wirklich begegnen. Unter der Voraussetzung einer Wartezeit von 15 Minuten ist diese Wahrscheinlichkeit gegeben durch



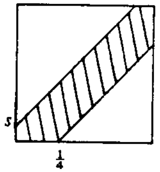

$$P(|X-Y| < \tfrac{1}{4}) = 1 - (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{16}$$

Interessanter ist es, die Verteilung für die Wartezeit von A (wir nennen sie W) und den Erwartungswert E(W) zu bestimmen. Die Schwierigkeit ist, daß W weder eine diskrete noch eine kontinuierliche Zufallsgröße darstellt - W nimmt die Werte 0 und 1/4 mit positiver Wahrscheinlichkeit an, wohingegen gewisse Werte zwischen 0 und 1/4 zwar denkbar sind, diese aber die Wahrscheinlichkeit 0 haben. Solche Mischarten von Zufallsgrößen sind keineswegs nur mathematische Artefakte: sie treten in einfachsten Wahrscheinlichkeitsräumen auf, wie etwa dem Einheitsquadrat, und das in ungekünsteltem Zusammenhang.

Die Berechnung von $P(W \leq s)$ ist leistbar, wenn man nur Vorsicht walten läßt! Es folgen die einzelnen Schritte, begleitet von Diagrammen:

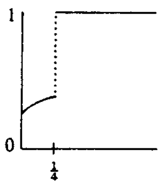



$$P(W=0) = P(X-\tfrac{1}{4} < Y < X) = 7/32$$




$$P(W \leqslant s) = P(X-\tfrac{1}{4} < Y < X+s)$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{1}{2}(1-s)^2 \quad 0 \leqslant s \leqslant \tfrac{1}{4}$$
$$P(W \leqslant \tfrac{1}{4}) = 1$$

Unten ist der Graph zu $P(W \leq s)$ skizziert. Ein einfacher Weg, E(W) zu ermitteln, ist, die Fläche oberhalb der Kurve, begrenzt durch y = 1, zu berechnen (siehe [1]). Es ergibt sich 1/6.




Wer diese Beispiele in seinen Unterricht einbringen möchte, den verweise ich auf eine BBC-Diskette, die die Verwandtschaft zwischen kumulierter Dichtefunktion und Dichtefunktion für die Zufallsgrößen S, M, D, L und U demonstriert. Sie ist vom



Autor [2] zum Selbstkostenpreis zu beziehen.

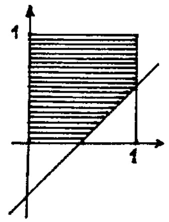
NACHWEISE


[1] SYKES, A. M.: An Alternative Approach to the Mean Teaching Statistics, Vol. 3 (1981), No. 3, 82-87

[2] Department of Management Science and Statistics, University College of Swansea, Singleton Park, Swansea


Anmerkungen von I. Strauß

1) Der Autor gibt als Ergebnis 3/4 an, was die Skizze widerlegt:




2) Der zweite Summand kann nur mit Kenntnissen der Integralrechnung bestimmt werden.

3) Dies scheint mir ein minimales Problem zu sein.

4) Der Rand der Punktmenge muß parallel zur zweiten Winkelhalbierenden verlaufen.

5) Ein vertrauter Parallelfall ist das Lösen quadratischer Gleichungen.

6) Korrekt muß es $0 < s \leq 1$ heißen.