ZUR ERARBEITUNG DES EMPIRISCHEN GESETZES DER GROSSEN ZAHLEN IM STOCHASTIKUNTERRICHT

von **Heinz Dabrock**, St. Ingbert

1. Einleitung

Es fällt auf, daß das empirische Gesetz der großen Zahlen in der Schulbuchliteratur und somit wohl auch im Unterricht auf sehr unterschiedlichen Wegen herausgearbeitet und - wenn überhaupt - recht uneinheitlich formuliert wird. Der vorliegende Aufsatz analysiert die gebräuchlichsten dieser Zugänge zum empirischen Gesetz der großen Zahlen und gibt in der Auseinandersetzung mit Unzulänglichkeiten methodischer und innermathematischer Art Anstöße zum Nachdenken über stochastische Phänomene und mögliche unterrichtliche Gesichtspunkte.

Besonderes Augenmerk liegt auf der graphischen Visualisierung des Verhaltens der relativen Häufigkeit. Konsequenterweise wird dabei auch die methodisch-didaktische Aufbereitung des zugrundeliegenden Datenmaterials hinterfragt.

Zum Sprachgebrauch sei angemerkt, daß der Begriff "relative Häufigkeit" hier sowohl für Zahlenwerte als auch für Zuordnungen als auch als Abstraktum für den Themenkreis verwendet wird. Mißverständnisse sind im textlichen Zusammenhang nicht zu erwarten.

2. Die intuitive Bedeutungshaltigkeit der relativen Häufigkeit

Im Alltag tritt die relative Häufigkeit mit unterschiedlicher Bedeutungshaltigkeit auf. Im Vordergrund stehen dabei

- der reine Informationscharakter (z.B. Arbeitslosenquote)
- der Vorhersagecharakter (z.B. Wahlprognosen)
- der Verallgemeinerungscharakter (z.B. Qualitätskontrolle).

Fragt man bei einer durch eine relative Häufigkeit gegebenen Information nach ihrer Aussagekraft oder nach sich daraus ergebenden Konsequenzen, so treten stochastische Aspekte, insbesondere das Problem der Übertragung der Information auf Teilbereiche, hervor.

Beim Vorhersagecharakter macht man eine Aussage über eine zukünftige Situation. Der Verallgemeinerungscharakter dient der Ausweitung einer partikulären Aussage auf eine bestehende Gesamtsituation. Beide Arten der Aussageerweiterung sind mit Unsicherheit behaftet, stochastisch also relevant.

Intuitiv ist dabei klar, daß die Qualität der erweiterten Aussagen mit der Anzahl der erhobenen Daten, also mit der Länge der Versuchsreihe zunimmt. Insofern kann man sich auf die Betrachtung der relativen Häufigkeit am Ende langer Versuchsreihen beschränken, ohne die Entwicklung im einzelnen zu verfolgen (vgl. etwa [5]). Unmittelbar stellt man fest:

"Bei mehreren langen Versuchsreihen unterscheiden sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses nur wenig voneinander."

Die mathematisch unpräzisen Begriffe "lange" und "wenig" deuten schon auf noch zu bewältigende Konkretisierungen hin, soweit diese überhaupt möglich sind. Ausgehend von obiger Formulierung dürfte es auch noch für Schüler der SII ausgesprochen schwierig sein, die stochastischen Anwendungsaspekte der relativen Häufigkeit zu erschließen. Etwas einfacher scheint es, diese Aspekte anhand obiger Aussage nachzuvollziehen, nachdem sie bereits vorab an praktischen Beispielen isoliert wurden.

Folgende Fragen helfen, intuitiv gewonnene Interpretationen der relativen Häufigkeiten rational abzusichern und gleichzeitig intuitiv vorhandenes Mißtrauen zu lokalisieren und argumentativer Kritikfähigkeit zuzuleiten:

- Gilt obige Aussage nur bei gleichlangen Versuchsreihen? (eingeschränkter Prognosebereich?)
- Liefert jede Versuchsreihe einen "passenden" Wert? (Unsicherheit der Prognose!)
- Welche Versuchsserie ist die richtige? Darf man mitteln? (relative Häufigkeit als Vorstufe für Wahrscheinlichkeit)
- Warum werden lange Versuchsserien gefordert? Was heißt "lang"? (kein Vorhersagecharakter für Einzelversuche)
- Wie verhält sich die relative Häufigkeit bei Verlängerung der Serie? (Verallgemeinerungscharakter)
- Ist es günstiger, zwei kleinere Versuchsserien durchzuführen und zu mitteln oder *eine* längere Serie zu nehmen? (Bearbeitung und Interpretation von Daten).

Die hier aufgeworfene Problematik macht deutlich, wie hilfreich - ja sogar notwendig - die Visualisierung der relativen Häufigkeiten im Verlauf der Versuchsserie(n) zum Verständnis des empirischen Gesetzes der großen Zahlen ist. Der reine Zahlenwert am Ende der Versuchsserie sagt entschieden zu wenig aus.

Noch fragwürdiger wird die methodische Situation, wenn die Versuchsdaten zur Erarbeitung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen durch Simulation (z.B. mit Hilfe von Zufallszifferntabelle oder Zufallszahlengenerator) gewonnen werden. Schüler und Lehrer mögen hier intuitiv ein gewisses Unbehagen spüren, das mitunter jedoch dadurch abgemildert wird, daß sich bei langen Versuchsserien in etwa der erwartete Wert für die relative Häufigkeit einstellt (z.B. 0.17 beim Würfeln).

Simulation ist aber vom Wesen her an ein *mathematisches Modell* gebunden, das simuliert wird, und an eines, mit dem simuliert wird. Ihr Verständnis bedarf also der Kenntnis von Modellen. Die Übertragbarkeit auf die *Realität* ist eine Frage der Güte des Modells. Eine gute Modellierung aber stützt sich sehr häufig auf das empirische Gesetz der großen Zahlen. Insofern kann dieses nicht als neue Erkenntnis aus simulierten Daten gewonnen werden. Man kann sich den Gedankengang sehr gut am Simulieren des Werfens eines Reißnagels (,) vor Augen führen. Simulationen sind in diesem frühen Stadium noch nicht angebracht. Ein intuitiv vorhandenes Mißtrauen ist positiv zu werten.

3. Stabilisierung der relativen Häufigkeit durch Arithmetik?

Zur graphischen Darstellung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen betrachte man folgendes Beispiel aus [4] S. 30 zur relativen Häufigkeit der Augenzahl 6 beim Würfeln. Die Verbindungsstrecken zwischen den empirisch "gesicherten" Diagrammpunkten sind methodisch motivierte Hilfslinien zur Verdeutlichung des Schwankungsverhaltens ohne realen Bezug.

Tab. 4.1

n	10	20	30	40	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
z	1	3	5	7	9	16	26	39	40	51	60	65	75	79
$h_n(A)$	0,1	0,15	0,167	0,175	0,180	0,160	0,173	0,195	0,160	0,170	0,171	0,163	0,167	0,158
$h'_{50}(A)$					0,180	0,140	0,200	0,260	0,020	0,220	0,180	0,100	0,200	0,080

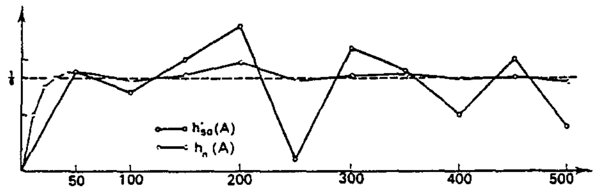


Fig. 4.1

Die graphische Darstellung (Fig. 4.1) zeigt, daß die Werte von $h'_{50}(A)$ über die ganze Versuchsfolge hin unvermindert weit schwanken, während sich $h_n(A)$ schon ab $n = 50$, stärker noch ab $n = 250$ deutlich um den Wert $0,167 \approx \frac{1}{6}$ stabilisiert, wenn auch immer wieder unvorhersehbare Schwankungen auftreten, deren Weite jedoch immer geringer wird. Die großen Schwankungen von $h'_{50}(A)$ wirken sich auf $h_n(A)$ mit wachsendem n immer weniger aus, wie sich auch rechnerisch nachweisen läßt.

Gerade auch der Anfang des Diagramms ist der Kritik ausgesetzt. Was ist eigentlich die relative Häufigkeit bei 0 Versuchen? Die Visualisierung sollte sinnvollerweise mit dem ersten tabellarisch notierten Wert beginnen.

Sehr interessant erscheint eine unterrichtliche Diskussion, wie das Diagramm wohl ausgesehen hätte, wenn man bei obiger Versuchsserie die relative Häufigkeit statt nach Teilserien mit 50 Versuchen stets nach 25 Versuchen (oder gar weniger) notiert und visualisiert hätte. Indirekt hinterfragt man damit sogar die Sinnhaftigkeit der Aufgliederung in Teilserien.

Grundsätzlich kann die relative Häufigkeit jeder (Teil)Versuchsserie der Länge n auch die Werte 0 oder 1 annehmen (und n-1 diskrete Zwischenwerte). Was wird aus dieser grundsätzlichen "Schwankungsbreite" 1 der relativen Häufigkeit, wenn man die Teilversuchsserien wie im obigen Beispiel schrittweise zu *einer* Versuchsserie zusammenfaßt?

Sei dazu $\frac{z_1}{n_1}$ die relative Häufigkeit nach n_1 Versuchen. Durch Hinzunahme einer Teilserie der Länge k ergibt sich die neue relative Häufigkeit $\frac{z_2}{n_2}$ mit $n_2=n_1+k$ und $z_1 \le z_2 \le z_1+k$,

$$\text{also} \quad \frac{z_1}{n_2} \le \frac{z_2}{n_2} \le \frac{z_1+k}{n_2} .$$

Die Schwankungsbreite c der relativen Häufigkeit aufgrund der Hinzunahme der Teilserie ist somit

$$c = \frac{z_1+k}{n_2} - \frac{z_1}{n_2} = \frac{k}{n_2} = \frac{k}{n_1+k} < 1.$$

Hält man hier die Teilserienlänge k konstant, so reduziert sich die Schwankungsbreite gegenüber dem Vorwert mit wachsender Gesamtlänge n_1. Das zugehörige Diagramm wird zusehends glatter und verflacht (linearisiert) immer mehr. Diese Tatsache ist in erster Linie durch numerische Aufbereitung der Versuchsdaten bedingt und hat wenig mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen zu tun.

Das Diagramm belegt bei langen Serien eher den nichtstochastischen Sachverhalt, daß ein über eine große Anzahl vergleichbarer Zahlenwerte (hier: 1 für "Treffer", 0 für "Niete") gebildeter Mittelwert nur wenig variiert, wenn einige neue Daten hinzukommen, wobei in der Regel die Änderung umso geringer ausfällt, je weniger neue Daten es relativ zu den alten sind.

Die Verflachung der Diagrammkurve darf auch nicht mit der (ebenfalls beobachtbaren) Stabilisierung um einen festen Wert verwechselt werden, wie es leider allzu oft geschieht. Das empirische Gesetz der großen Zahlen sollte nicht aus einer Augenwischerei hervorgehen.

Wie kann man die Daten einer Versuchsserie numerisch so aufbereiten, daß bei Hinzunahme der nächsten Teilserie eine minimale Schwankungsbreite c der relativen Häufigkeit gegenüber dem Vorwert erhalten bleibt? Sinnvollerweise interessieren nur c<1 mit Werten "nahe" bei 1.

Für die Länge k der nächsten Teilserie erhält man:

$$\frac{k}{n_1+k} \geq c \text{ bzw. } k \geq \frac{c}{1-c}*n_1.$$

Die nächste Anzahl n_2 aller Versuche ist also

$$n_2 = n_1 + k \geq \frac{1}{1-c}*n_1.$$

Die Länge der nächsten Teilserie hängt insbesondere von der Anzahl der bereits durchgeführten Versuche ab. Um c=0.9 zu erhalten, muß man die Versuchszahl jeweils verzehnfachen; jeweilige Verdopplung der Anzahl ergibt die Schwankungsbreite c=0.5.

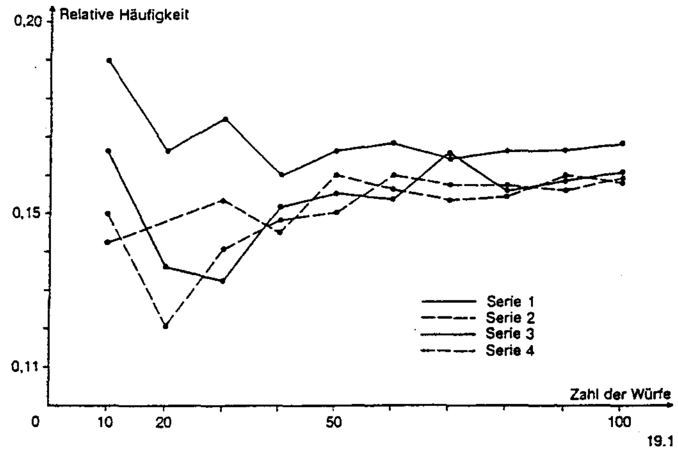
Auf obiges Diagramm übertragen bedeutet dies, daß man es zur Herleitung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen *nicht* in äquidistanten Schritten lesen darf. Dann aber ist eine solche Visualisierung durch schrittweise Hinzunahme von Teilversuchsserien fester Länge methodisch zumindest ungeschickt.

Andererseits bleibt die Frage, ob man bei variabler Schrittweite im obigen Sinne (z.B. jeweilige Verdopplung der Versuchszahl) die Abszisse des Diagramms noch linear einteilen sollte bzw. kann oder ob eine logarithmische Einteilung vorteilhafter ist. Wäre eine derartige Darstellung auch schülergemäß? Wie sinnhaltig wären dann noch die Verbindungsstrecken zwischen den einzelnen Diagrammpunkten?

Ein weiterer Mangel obiger Visualisierung ist leicht zu beheben. Stellt man mehrere Versuchsserien im selben Diagramm dar, wird deutlich, daß sich unabhängig von der Serie in etwa der gleiche Stabilisierungswert ergibt.

Nachfolgend ist das entsprechende Diagramm aus [7] S. 19 abgebildet. Bezüglich des Textes ist klarzustellen, was "brauchbare Vorhersagen bezüglich weiterer Durchführungen"

heißen soll. Ist der Richtwert einmal festgelegt, kann man ihn durch eine Parallele zur x-Achse darstellen und gegebenenfalls auch Toleranzbreiten mittels eines Parallelenpaars einbeziehen (vgl. [2] S. 34).



Nach vielen Durchführungen des Zufallsexperimentes, auch in verschiedenen Serien, beobachtet man ein **Stabilisieren** der relativen Häufigkeiten, d.h., man kann nach vielen Durchführungen einen **Richtwert** für die relative Häufigkeit festsetzen, mit dem brauchbare Vorhersagen bezüglich weiterer Durchführungen möglich sind.

4. Die numerische Eigenständigkeit der Teilserien

Ursache der im vorigen Abschnitt kritisierten Nebeneffekte ist die Übernahme von bereits verwerteten Versuchen in die Berechnung der als nächstes darzustellenden relativen Häufigkeit. Somit liegt nahe, auf Übernahmen zu verzichten. Stattdessen visualisiert man die relativen Häufigkeiten von voneinander unabhängigen Teilversuchsserien mit schrittweise wachsender Länge.

Hält man dabei die Schrittlänge k zwischen den Teilserienlängen konstant und beginnt mit einer Teilserie der Länge l_1, so hat die i-te Teilserie die Länge

$$l_i = l_1 + (i-1)*k.$$

Bei m Teilserien erhält man die Gesamtlänge n der Versuchsserie

$$n = l_1 + (l_1+1*k) + \ldots + (l_1+(m-1)*k) = \tfrac{1}{2}m*(2l_1+k*(m-1)).$$

Für den Vorgang in kleinsten Schritten (l_1=1; k=1) erhält man

$$n = \tfrac{1}{2}m*(m+1).$$

Insgesamt hat man dann n Versuche durchzuführen, um m Teilserien wachsender Länge zu erhalten. Zu jeder Teilserie wird die relative Häufigkeit bestimmt und als Ordinate über der Teilserienlänge l_i als Abszisse in ein Diagramm eingetragen. Die graphische Veranschaulichung der n Versuche reduziert sich also auf m Diagrammpunkte.

Gibt man sich eine gegenüber der Schrittlänge k allzu große Anfangslänge l_1 vor, also $l_1 \gg k$, so findet der eigentlich zu veranschaulichende Stabilisierungsprozeß in der Hauptsache "unsichtbar" bis l_1 statt. Einige weitere Schritte der Länge k bewirken keine wesentlich darüber hinausgehende Stabilisierungseffekte mehr. In diesem Sinne liegt bei l_1 ein im empirischen Gesetz der großen Zahlen gründender Anfangseffekt vor, der die Erkenntnis weitergehender Stabilisierung erschwert.

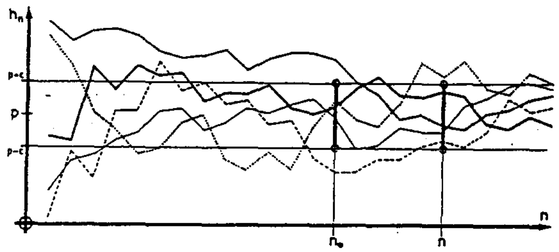
Wählt man hingegen die Schrittlänge k im Bereich der Anfangslänge l_1, also $l_1 \approx k$, so kann man die Stabilisierung am Diagramm deutlich mitverfolgen.

Um einen Vergleich mit dem bereits aufgeführten Diagramm aus [4] S. 30 zu erleichtern, verbinde man noch aufeinanderfolgende Diagrammpunkte miteinander. Im neuen Diagramm klingen die Schwankungen gegenüber dem Vorwert wesentlich langsamer ab, weil die grundsätzliche Schwankungsbreite c=1 durch die numerische Eigenständigkeit der Diagrammpunkte auch bei großen Serienlängen erhalten bleibt. Stabilisierungseffekte beruhen hier einzig auf dem empirischen Gesetz der großen Zahlen.

Entscheidend ist jetzt die zur neuen Visualisierung passende Interpretation. Hierbei muß im wesentlichen zwei Aspekten Rechnung getragen werden:

1. Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich.
2. Bei jeder genügend langen Versuchsserie kann derselbe Stabilisierungswert p genommen werden

Beide Aspekte entsprechen einander insofern, als jede lange Versuchsserie geschickt in mehrere Teilserien aufgespalten werden kann und umgekehrt mehrere Versuchsserien zu einer einzigen zusammengefaßt werden können. Für den Unterricht am einfachsten dürfte es sein, von vornherein mehrere Versuchsserien zu betrachten (von denen jede aus Teilserien aufgebaut ist). Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise zeigt folgende Abbildung aus [2] S. 250 ein entsprechendes Diagramm zum schwachen Gesetz der großen Zahlen. Sie läßt sich unmittelbar als Veranschaulichung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen uminterpretieren.



Die numerische Eigenständigkeit der einzelnen Diagrammpunkte wird durch die Fußnote betont:

"Jede gezeichnete Schlange ist folgendermaßen entstanden: Zu jedem n werden n unabhängige Versuche gemacht und dann h_n bestimmt ... Um dann eine Schlange bis n=100 zeichnen zu können, müssen 1+2+3+...+100 = 5050 Versuche ausgeführt werden!"

Im folgenden seien die wichtigsten Gesichtspunkte zur Arbeit mit einem solchen Diagramm aufgeführt:

- Vergleich der relativen Häufigkeiten der Teilserien mit gleicher Serienlänge l_i, insbesondere für große Versuchszahlen
- Entwicklung einer Serie (Schlange) mit wachsender Versuchszahl
- Entwicklung der Schwankungen der relativen Häufigkeit gegenüber dem Vorwert innerhalb einer Serie (Schlange)
- Entwicklung der Schwankungsbreite über alle Serien bei wachsender Versuchszahl
- Aussagen über die relative Häufigkeit bei Serienlängen über den Diagrammbereich hinaus.

Gerade der letzte Untersuchungsgegenstand ermöglicht umfassendes Arbeiten mit den Diagrammdaten. Faßt man zwei Teilserien der Längen l_i und l_j zu einer neuen Serie der Länge l_i+l_j zusammen, erreicht man leicht eine Überschreitung des Diagrammbereichs. Die relative Häufigkeit $r_{i,j}$ ergibt sich dann als gewichtetes (arithmetisches) Mittel aus den relativen Häufigkeiten r_i bzw. r_j der Teilserien:

$$r_{i,j} = \frac{r_i l_i + r_j l_j}{l_i + l_j}.$$

Man beachte, daß die relativen Häufigkeiten r_i und r_j völlig unabhängig voneinander sind (im Gegensatz zu den Diagrammwerten aus Abschnitt 3). $r_{i,j}$ liegt zwischen r_i und r_j. Analoge Aussagen gewinnt man natürlich, wenn man mehrere (alle) Teilserien zusammenfaßt. Insofern macht das Diagramm auch Aussagen über die relative Häufigkeit für sehr große Versuchszahlen; es steckt sozusagen einen (unverbindlichen) Rahmen ab.

Der Gedankengang über das gewichtete Mittel der relativen Häufigkeiten der Teilserien macht sehr deutlich, daß "Ausreißer" in Teilserien, welche im Diagramm klar hervortreten, langfristig ausgebügelt werden.

Gut vermittelbar am Diagramm ist auch, daß ein/der "Stabilisierungswert" keine zuverlässige Vorhersage der relativen Häufigkeit bei kleinen Serien und erst recht nicht im Einzelversuch erlaubt.

Ein Nachteil des Diagramms ist sicherlich seine Erstellung. Die Anzahl der durchzuführenden Versuche ist sehr groß. Andererseits ist der Rechenaufwand pro Teilserie minimal. Unterrichtlich bietet es sich an, hier die gesamte Klasse mit häuslicher Datenerhebung zu beschäftigen (z.B. Reißnagelwerfen). Fügt man die erhobenen Daten zu Teilserien wachsender Länge zusammen und vergleicht die relativen Häufigkeiten miteinander, so ist der Einstieg in eine Diskussion über die Zulässigkeit dieses Vorgehens bzw. über die Forderung nach Gleichheit der Versuchsbedingungen vorprogrammiert.

5. Die Verwendung statistischen Datenmaterials

Sehr motivierend ist sicherlich die Erarbeitung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen anhand von statistischen Daten. Hier sei als Beispiel auf eine Darstellung zum Geschlecht von Neugeborenen aus [3] S. 35 zurückgegriffen.

Tab. 4.2

	Lebendgeborene 1964 insgesamt n_i	männlich z_i	$h_{n_i}(\{♂\})$	$n := \Sigma n_i$	$z := \Sigma z_i$	$h_n(\{♂\})$
J	91 098	46 724	0,5129	91 098	46 724	0,5129
F	89 700	46 193	0,5150	180 798	92 917	0,5139
M	97 077	49 759	0,5126	277 875	142 676	0,5135
A	93 565	48 207	0,5152	371 440	190 883	0,5139
M	92 966	48 073	0,5171	464 406	238 956	0,5145
J	88 677	45 354	0,5115	553 083	284 310	0,5140
J	90 532	46 703	0,5159	643 615	331 013	0,5143
A	85 280	43 689	0,5123	728 895	374 702	0,5141
S	88 059	45 290	0,5143	816 954	419 992	0,5141
O	83 275	42 808	0,5141	900 229	462 800	0,5141
N	79 425	40 914	0,5147	979 724	503 714	0,5141
D	85 713	44 265	0,5164	1 065 437	547 979	0,5143

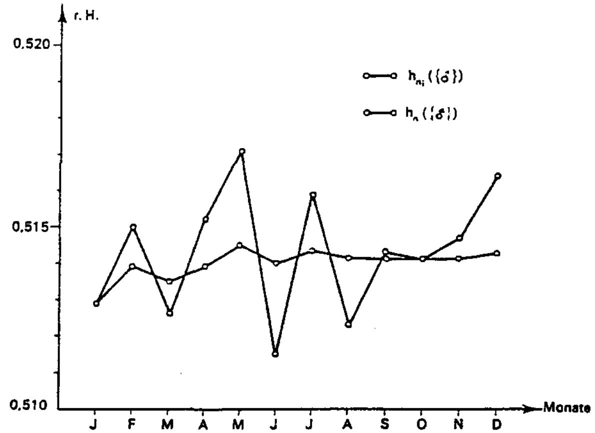


Fig. 4.3

Auf die Problematik der Übernahme von Vordaten bei der Visualisierung wurde schon eingegangen. Anhand des vorliegenden Datenmaterials kann dieser stabilierende Nebeneffekt nur teilweise isoliert werden. Hier tritt nämlich ein grundlegender Mangel von Statistiken neu hinzu. Diese werden im Regelfalle in zeitlicher Gliederung erstellt, was zur Folge hat, daß in die einzelnen Zeitabschnitte i.a. unterschiedlich viele Versuche fallen.

Die für die einzelnen Zeiten errechneten relativen Häufigkeiten haben demnach unterschiedliches Gewicht. Sie sind also nicht unmittelbar miteinander vergleichbar, wie es die geradlinige Verbindung benachbarter Diagrammpunkte impliziert. Diese Unzulänglichkeit ist aus dem Diagramm heraus aber nicht zu erfassen. Zeitlich gegliederte Statistiken zur relativen Häufigkeit sind also nur sinnvoll bearbeitbar, wenn gleichzeitig die Versuchezahlen bekannt sind.

Wie bereits erwähnt, darf ein Verhalten der relativen Häufigkeit im Sinne des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nur erwartet werden, wenn die Versuche unabhängig voneinander unter stets gleichen Bedingungen durchgeführt werden.

Diese Grundvoraussetzung ist bei statistischem Datenmaterial i.a. nur eingeschränkt erfüllt. Verallgemeinerungen und Prognosen sind somit stets kritisch zu hinterfragen. Im Vorblick auf Simulationen folgt, daß deren Einsatz situativ stets von neuem auf seine reale Berechtigung hin geprüft werden muß.

Für den Unterricht in der Schule heißt dies konsequenterweise, neben den mathematischen Aspekten statistischen Datenmaterials auch seine sachbezogene Aussagekraft zu hinterfragen. Eine diesbezügliche Sensibilisierung ist ein wichtiger Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung der Schüler, den der Stochastikunterricht allerdings nur eingeschränkt leisten kann.

6. Unterrichtlicher Ausblick

Jede der vorgestellten Visualisierungen des empirischen Gesetzes der großen Zahlen hat ihre eigene Bedeutung im genetischen Gefüge des Verständnisprozesses. Aufgrund des Nuancenreichtums der Eigenschaften der relativen Häufigkeit und der mit ihnen verbundenen Bedeutungshaltigkeit und Anwendungsvielfalt darf man kaum erwarten, daß Schülern die Tragweite der Thematik allein durch eine kleine punktuelle Unterrichtsreihe erschlossen werden kann. Interpretation und Auswertung von Diagrammen müssen langfristig geschult werden, nicht nur im Mathematikunterricht.

Visualisierungen oben genannter Art erfordern auf Schülerseite bereits ein gutes Abstraktionsvermögen. In diesem Sinne bieten sich passende Diagramme statistischer Herkunft als Einstieg an. Sie liefern einerseits das Grundphänomen, andererseits beinhalten sie alle kritisierten Mängel:

- eventuelle Übernahme von Vordaten
- zeitliche Gliederung in Teilserien
- eingeschränkte Unabhängigkeit der Versuche
- veränderliche Versuchsbedingungen
- ungeklärtes Verhalten verschiedener Versuchsserien.

Aufbauend auf dem Grundverständnis kann man sich bei Bedarf immer weiter vortasten, wobei die genannten Unzulänglichkeiten als Motivationshilfen dienen. Die verbale Ausformulierung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen sollte ebenfalls stufenweise erfolgen, wobei jeweils Alter der Schüler, Vorkenntnisse und Unterrichtsintension einfließen. Eine Formulierung nach der ersten Begegnung mit der Thematik ist beispielsweise (vgl. [8] S. 75):

"Mit zunehmender Zahl der Versuche eines Zufallsexperiments ändert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses immer weniger."

Man beachte, daß die Herleitung dieser Aussage methodisch offen ist und die Übernahme von Vordaten keineswegs impliziert wird. Der axiomatischen Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der SII könnte schließlich folgende Formulierung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen vorangehen:

"Bei einem Zufallsexperiment weichen die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses in verschiedenen gleichlangen Versuchsserien (in der Regel) weniger voneinander ab, wenn man

die Versuchezahl erhöht. Hierbei kann ein Richtwert p so festgesetzt werden, daß sich zu jeder Versuchezahl n eine ϵ-Umgebung von p als Schwankungsintervall eignet, wobei ϵ (in der Regel) mit wachsendem n immer kleiner wird."

Diese Formulierung zeichnet das schwache Gesetz der großen Zahlen bereits vor. Ein Konkretisierungsversuch für den Richtwert p kann als Einstieg in das Axiomatisieren dienen. Eine Definition der Wahrscheinlichkeit als Stabilisierungswert der relativen Häufigkeit sollte aber auf jeden Fall vermieden werden. Stochastisch ist eben nicht deterministisch.

7. LITERATURVERZEICHNIS

[1] ATHEN H., GRIESEL H. (Hrsg.): *Mathematik heute, Grundkurs Stochastik* - Hannover: Schroedel 1979

[2] BARTH F., HALLER R.: *Stochastik Leistungskurs* - München: Ehrenwirth 1986

[3] HEIGL F., FEUERPFEIL J.: *Stochastik Leistungskurs* - München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1975

[4] FEUERPFEIL J., HEIGL F., VOLPERT H.: *Stochastik Grundkurs* - München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1981

[5] GLASER H., SCHEID H., WELLSTEIN H. (Hrsg.): *Sigma, Grundkurs Stochastik* - Stuttgart: Klett 1982

[6] KUYPERS W., LAUTERS J.: *Mathematik Sekundarstufe II, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* - Düsseldorf: Schwann-Bagel 1979

[7] SCHMID A., STARK J.: *Lambacher Schweizer, Stochastik Leistungskurs* - Stuttgart: Klett 1988

[8] SCHÖNBECK J., SCHUPP H. (Hrsg.): *Plus, 7. Schuljahr* - Paderborn: Schöningh 1976