LOKALE MODELLE IM STOCHASTIK-UNTERRICHT

von **Ewa Lakoma**, Warschau

Eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts in allen Jahrgangsstufen ist es, über die Beschäftigung mit schematischen mathematischen Fertigkeiten hinaus vor allem mathematische Aktivitäten zu fördern. Daher gehört es zu den Grundprinzipien der Mathematikdidaktik, solche Unterrichtsformen herauszufinden, die - passend zu den gerade behandelten Themen - die Schüleraktivitäten herausfordern.

Solche Unterrichtsmethoden können dazu führen, Probleme zu entdecken, diese Probleme zu verbalisieren, hierzu eine mathematische Formulierung zu entwickeln und die Probleme (wenn auch nur teilweise) zu lösen - entsprechend dem Alter der Schüler.

Die Bedeutung von mathematischen Modellen ist schon seit langer Zeit von Mathematikdidaktikern betont worden; tatsächlich gibt es für die Schule nur wenige gute Beispiele von lokal verwendbaren mathematischen Modellen, die einerseits von den Schülern angenommen werden und andererseits zum richtigen Zeitpunkt und an der richtigen Stelle zu umfassenderen Modellen weiterentwickelt werden können. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik scheinen sich sehr gut dafür zu eignen, lokale Modelle zu verwenden, jedenfalls eher als globale theoretische Modelle.

In diesem Aufsatz wird beschrieben, wie für ein und dasselbe stochastische Problem verschiedene Modelle ausprobiert werden, von ganz einfachen Ansätzen bis zu mathematisch immer anspruchsvolleren Modellen; und wir sehen, wie die Schüler an ihnen wachsen, wie sich ihr Horizont zu allgemeineren Modellen erweitert.

Mathematische Modelle im Mathematikunterricht

In der Mathematik kommt der Begriff "Modell" in verschiedenen inhaltlichen Bedeutungen vor. Es gibt mathematische Modelle für physikalische Phänomene, Modelle einer mathematischen Theorie in einer anderen Theorie, physikalische Modelle von mathematischen Objekten, usw. Dieselbe Gleichung, z.B. $x^2+y^2+z^2= r^2$, kann einerseits aufgefaßt werden als ein

Modell des abstrakten Gegenstands "die Oberfläche einer Kugel" oder "die Kugel als räumlicher Körper", aber auch als das Modell irgendeiner Kugel mit Radius r. Eine Linie, die man mit Kreide auf eine Tafel zeichnet, eine Falz in einem Blatt Papier, eine Gleichung $ax+by+c=0$ - alles läßt sich als Modell einer Geraden in der Ebene auffassen. Es gibt verschiedenartige Hilfsmittel für den Unterricht, besonders in der Geometrie, die man als Modell von dreidimensionalen Figuren bezeichnen könnte; solche gibt es aber auch in der Stochastik wie z.B. das Galton-Brett.

Allgemein gesagt ist das Modell eines gegebenen Gegenstands ein eigenes Objekt; beide sind nicht identisch, aber in gewisser Weise ähnlich, so daß man das Modell anstelle des eigentlichen Objekts benutzen kann, wenn man etwas erklären will. Es muß ausdrücklich betont werden, daß ein mathematisches Modell nicht dasselbe ist wie das, wofür es steht; gewöhnlich gibt es auch viele Modelle für ein und dasselbe Objekt. Welches dieser Modelle am besten paßt, hängt sehr von der Frage ab, für welchen Zweck wir es benötigen.

Der Prozeß der Modellbildung verläuft in folgenden Stufen:

1. Formulierung des Problems
2. Konstruktion eines Modells, das die gewünschten Eigenschaften besitzt
3. Analyse des Modells
4. Überprüfung der Ergebnisse, die aus dem Modell gewonnen werden, mit der realen Situation.

Mathematisches Denken beginnt, wenn die Notwendigkeit einer Modellbildung der Wirklichkeit erkannt wird, sagt R. Thom. Die ersten Ansätze in dieser Richtung müssen natürlich von einfacher, ja primitiver Art sein. Wichtig ist dabei weniger der Inhalt als die Methode. Die ersten Modelle sind eher begrenzt (lokal) als allgemein (universell). Aber natürlich wird es auch bei lokalen Modellen Schüler geben, die Schwierigkeiten haben, damit zurechtzukommen. Die Einbettung verschiedener lokaler Modelle in eine allgemeine Theorie muß erst entwickelt werden.

Dieser Zugang ermöglicht es, einen allgemeinen didaktischen Plan zu erarbeiten, der vereinbar ist mit dem Prinzip der Parallelität und der geistigen Entwicklung jedes einzelnen Schülers gerecht wird.

Mathematische Modelle im Stochastikunterricht

Der Zugang zu lokalen Modellen über die Entwicklung von lokalen Modellen ist besonders geeignet für den Unterricht von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Die Modelle der allgemeinen Maßtheorie sind im allgemeinen zu abstrakt und zu schwierig für Schüler. Lokale Modelle sind nicht nur leichter zu verstehen, sondern können dazu benutzt werden, reale Daten zu interpretieren und Prognosen über Ereignisse zu machen. Diese lokalen Modelle werden im Laufe des Unterrichts nach und nach erweitert.

Wenn man lokale Modelle benutzt, ist man in der Lage, selbst solche Problemstellungen zu untersuchen, für die man sonst - aus der Sicht einer allgemeinen, wenn auch schulgemäßen Theorie - keinen Zugang hätte. So kann man z.B. maßtheoretische Begründungen nur im Falle endlicher Wahrscheinlichkeitsräume geben. Viele interessante Probleme, die sich aus Alltagssituationen ergeben, lassen sich aber gerade nicht durch endliche Maßräume beschreiben.

Ein solches Beispiel wird in diesem Aufsatz beschrieben. Es gibt noch viele andere solcher Beispiele dieser Art. Das im folgenden betrachtete Beispiel soll dazu dienen, verschiedene Zugänge aufzuzeigen, die auf verschiedenen Modellen beruhen - ähnlich der Art der Stilübungen ("Exercises de style") von Raymond Queneau.

Am Ende des Aufsatzes, wenn der Zugang über lokale Modelle und der globale maßtheoretische Zugang einander gegenübergestellt werden, wird der Unterschied im "Meta"-Stil deutlich.

Das Problem des ersten Erfolgs

Zwei Jungen (A und B) werfen beide abwechselnd auf einen Basketballkorb. Aufgrund der bisherigen Wurfresultate kann man sagen, daß beide mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% den Korb treffen. Sie werfen abwechselnd - bis zum ersten Erfolg.
A beginnt. Falls er daneben wirft, darf B werfen; dann wieder A, usw.

Haben beide die gleichen Erfolgschancen?

Zunächst einmal erläutern wir eine Lösung, die ziemlich akademisch erscheint. Man betrachtet den Wahrscheinlichkeitsraum (S,P) von abzählbar vielen Elementarereignissen:

w_∞: TTTTTTTTT...	und
w_1: H	w_2: TH
w_3: TTH	w_4: TTTH
w_5: TTTTH	w_6: TTTTTH

...
(dabei bedeutet H = Head = Treffer, T = Tail = Fehlwurf).

Diese Elementarereignisse sind Elemente einer Folge von Ereignisräumen S_n:

$S_1=\{H,T\}$
mit $P_1(\{H\})=0.5$

$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$
mit $P_2(\{HH,HT\})= 0.5$ bzw. $P_2(\{TH\})=0.25$

$S_3=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$
mit $P_3(\{HHH,HHT,HTH,HTT\})=0.5$ bzw. $P_3(\{THT,THH\})= 0.25$

...

Alle diese Ereignisse haben ein Maß; die Summe aller Maße ergibt den Wert 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1; \text{ außerdem gilt: } P(w_\infty) = 0.$$

Das Tripel (S,P(S),P) bildet eine Sigma-Algebra; daher läßt sich hierüber ein Maß definieren, das intuitiv angemessen erscheint, die charakteristischen Eigenschaften der Situation wiederzugeben.

Das uns interessierende Ereignis läßt sich durch $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{w_{2k-1}\}$ beschreiben. Hierfür berechnen wir:

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{w_{2k-1}\}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{w_{2k-1}\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Dieser Zugang mag brauchbar sein, wenn es darum gehen soll, die maßtheoretische Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung herauszustellen; aber er ist zu formal und zu kompliziert bzw. zu abstrakt für die Schule.

In der Schule benötigen wir einfachere Modelle, die auch für das Alter der Schüler angemessener sind.

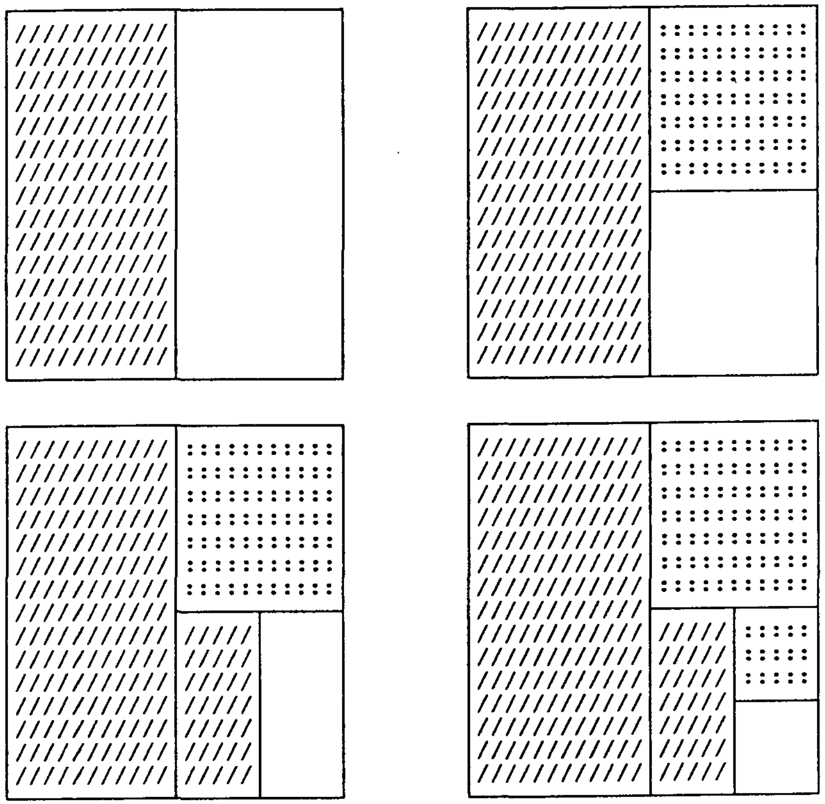
Beispiele von Lösungsverfahren:

<u>0. Experimentelles Vorgehen (Simulation)</u>

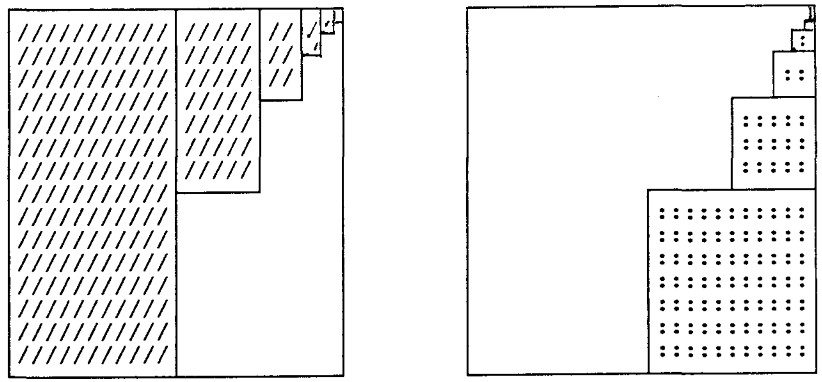
Dies ist das einzige natürliche Verfahren, mit dem man zu einer Lösung kommen kann, wenn die Schüler nichts oder so gut wie nichts über Stochastik wissen. Der Zufallsversuch kann sofort (Simulation mit Hilfe einer Münze) durchgeführt werden; allerdings ist das Resultat nicht sehr genau. Man weiß nicht, ob bei Wiederholung des Experiments wieder dasselbe Resultat herauskommt. Dieses Vorgehen bleibt - wenn es nicht theoretisch ergänzt wird - spekulativ; gleichwohl ist es nicht völlig nutzlos: Man erhält zumindest eine Vorstellung von der Größenordnung des Resultats.

1. Aufteilen der Chancen

Man verdeutlicht die Chancen durch Schraffierung von Teilflächen eines Quadrats:

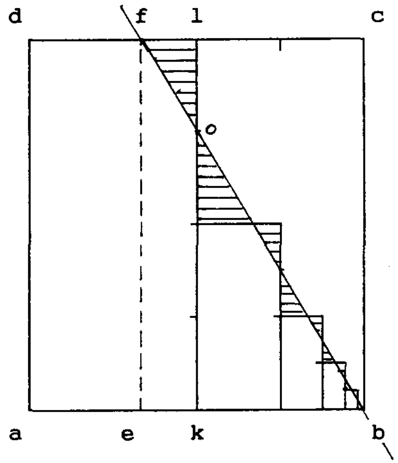


Was dabei herauskommt, wird deutlich, wenn man die Flächenstücke anders anordnet:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{2}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Den Grenzwert der unendlichen Folge kann man leicht durch geometrische Überlegungen herausfinden - im speziellen Fall

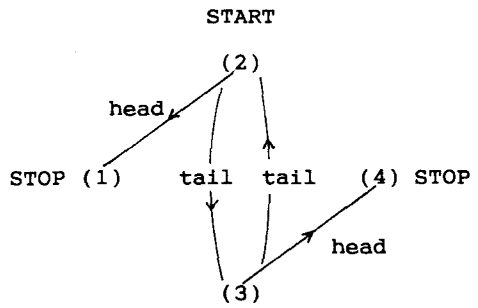


$$\frac{eb}{ef} = \frac{kb}{ko}$$

$$\frac{eb}{1} = \frac{2}{3}.$$

2. Interpretation als MARKOFF-Prozeß

Der Zufallsversuch läßt sich durch das folgende Übergangsdiagramm beschreiben.

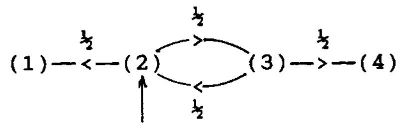


(1)	(2)	(3)	(4)
	100		
55		45	
55	24		21
65		14	21
65	8		27
68		5	27
68			32

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Endzustände 1 bzw. 4 erreicht werden, läßt sich näherungsweise durch Simulation bestimmen. Hier das Beispiel von 100 Versuchsdurchführungen.

3. Wahrscheinlichkeitsabakus

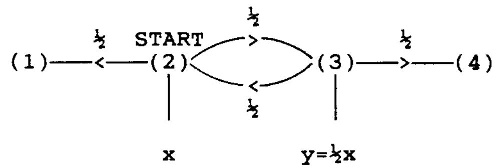
Genauer ist die Methode des Wahrscheinlichkeitsabakus: Man verschiebt Kugeln entsprechend den Wahrscheinlichkeiten im Übergangsdiagramm; dabei wächst die Anzahl der Kugeln in den Endzuständen periodisch um 2 bzw. 1 an; die gesuchten Wahrscheinlichkeiten verhalten sich daher wie 2:1.



	(1)	(2)	(3)	(4)	
	0	0	0	0	
	0	1	0	0	
	0	2	0	0	
	1	0	1	0	
	[1	1	1	0]	
	1	2	1	0	
	2	0	2	0	
2	2	1	0	1	1
	2	2	0	1	
	3	0	1	1	
	[3	1	1	1]	
	3	2	1	1	
	4	0	2	1	
2	4	1	0	2	1
	4	2	0	2	
	5	0	1	2	
	[5	1	1	2]	
	5	2	1	2	
	6	0	2	2	
	...	...	...	...	

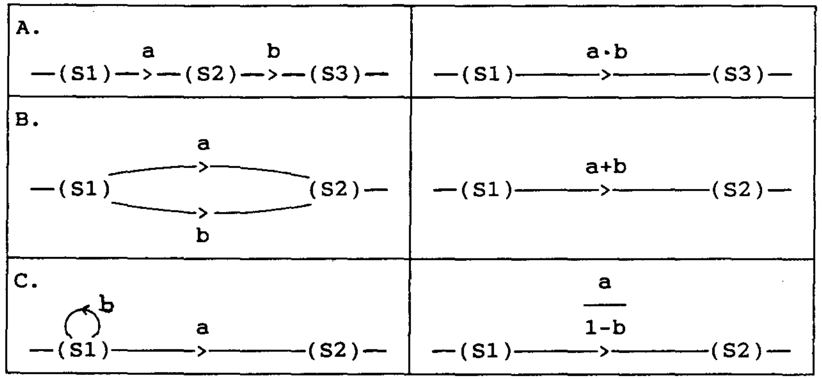
4. Mittelwertsregeln

Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch mit den Mittelwertsregeln für MARKOFF-Ketten berechnen:

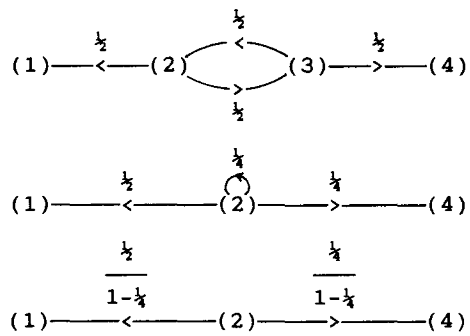


$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$
$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}x)$$
$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x$$
$$3/4x = \tfrac{1}{2}$$
$$x = 2/3$$

Wenn man die Regeln zur Vereinfachung von Übergangsdiagrammen erarbeitet hat, ...

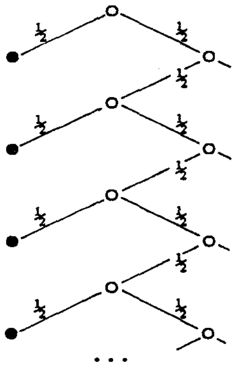


... ist auch der folgende Weg möglich:



5. Dualzahl-Methode

Eine weitere naheliegende Methode ist die Interpretation des unendlichen Baumdiagramms mit Hilfe der "Verschlüsselung" durch Dualzahlen:



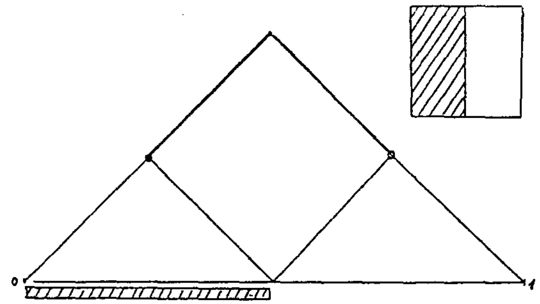
$$\begin{array}{r}
0{,}1 \\
+\ 0{,}001 \\
+\ 0{,}00001 \\
\dots \\
\hline
0{,}101010\dots
\end{array}$$

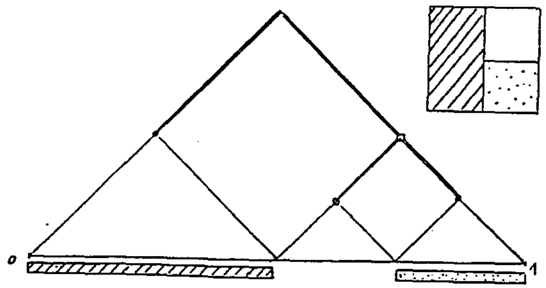
$$\begin{array}{rcl}
x & = & 0{,}101010\dots \\
100x & = & 10{,}101010\dots \\
\hline
3x & = & 2 \\
x & = & 2/3
\end{array}$$

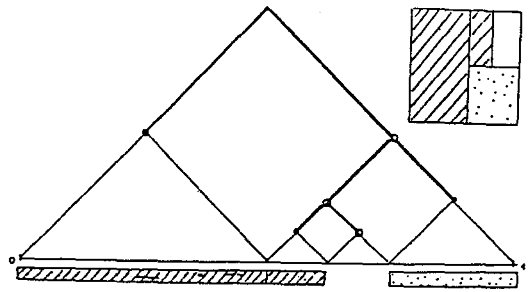
Weitere Methoden

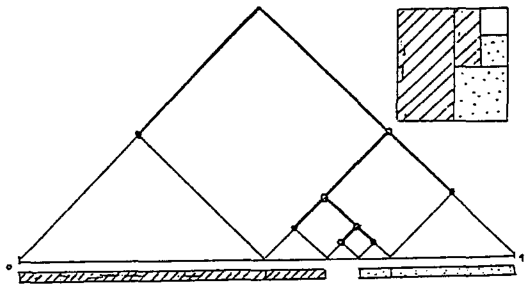
Die Zahl der Lösungswege ist damit nicht abgeschlossen. Denkbar sind auch z.B. Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten ...

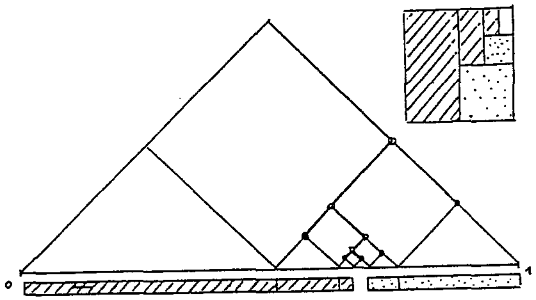
... aufgrund geometrischer Überlegungen ...

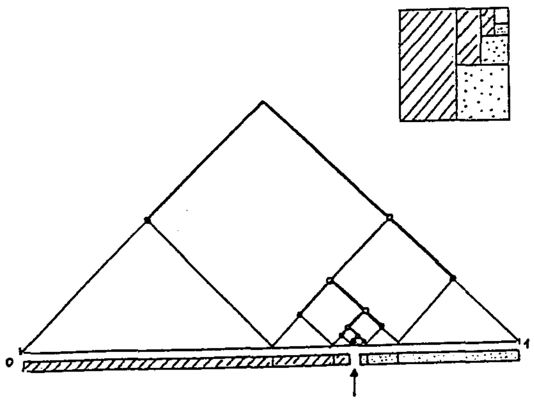




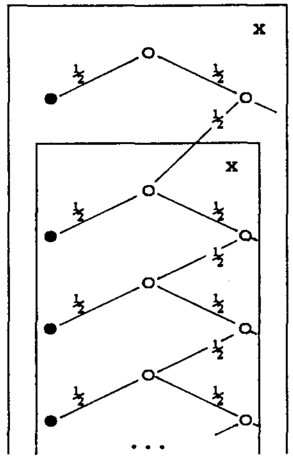


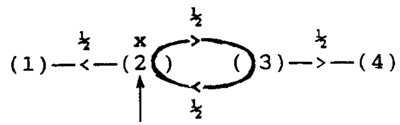


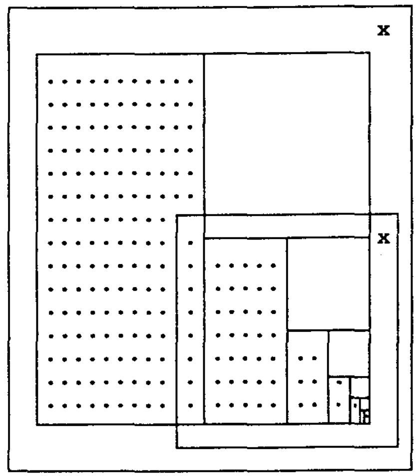




... aufgrund von Selbstähnlichkeiten ...







$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}x$$
$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x$$

$$3/4x = 1/2$$
$$x = 2/3$$

(vgl. auch die Methoden 1 und 5).

... mit Hilfe der Potenzen der Übergangsmatrix ...

(1)—<—(2)(3)—>—(4)

$$\begin{array}{c} \\ (1)\\(2)\\(3)\\(4) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4} & \mathbf{0} & \mathbf{1/4} \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{5/8} & \mathbf{0} & \mathbf{1/8} & \mathbf{1/4} \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 0 & 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{5/8} & \mathbf{1/16} & \mathbf{0} & \mathbf{5/16} \\ 5/16 & 0 & 1/16 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/16 & 0 & 5/16 \\ 5/16 & 0 & 1/16 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{21/32} & \mathbf{0} & \mathbf{1/32} & \mathbf{5/16} \\ 5/16 & 1/32 & 0 & 21/32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 21/32 & 0 & 1/32 & 5/16 \\ 5/16 & 1/32 & 0 & 21/32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{21/32} & \mathbf{1/64} & \mathbf{0} & \mathbf{21/64} \\ 21/64 & 0 & 1/64 & 21/32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...

Hierbei kann man das Verhältnis 2:1 auch ohne Computerberechnung bzw. Grenzwertbildung ablesen (fett gedruckte Zeile).

Wie die verschiedenen Lösungsansätze zeigen, ist es immer ratsam, unterschiedliche Modelle zu betrachten, damit man in der Lage ist, zwischen verschiedenen Modellen auswählen zu können. Durch verschiedenartige Zugänge werden Gleichartigkeiten und Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Modellen und verschiedenen Problemen hervorgehoben.

Die hier aufgezeigten Modelle gehören drei Ebenen der Komplexität an:

1. Komplexitätsebene
   Experimente, Beobachtung, eperimentelle oder computerterunterstützte Simulation

2. Komplexitätsebene
   Einfache Gebilde wie Bäume, Graphen, geometrische Figuren oder Diagramme mit einer zusätzlichen Struktur, die die reale Situation wiedergeben. Diese Modelle setzen oft Kenntnisse der Analysis voraus, obwohl manchmal die Resultate auch naiv abgelesen werden können.

3. Komplexitätsebene
   Maß-orientierte Modelle, die zu einem maßtheoretischen Modell führen.

LITERATURHINWEISE

[1] LAKOMA, Ewa: *O pewnym zadaniu z rachunku prawdopodobienstwa i jego rozwiazaniach*, MATEMATYKA 3/1984, S. 134-148

[2] LAKOMA, Ewa: O modelach matematycznych a nauczaniu rachunku prawdopodobienstwa, MATEMATYKA 5-6/1986, S. 223-239

[3] LAKOMA, Ewa: *Computer-oriented approach to stochastics teaching* (in polnischer Sprache), Doctor-thesis, Warsaw University 1988, supervisor Prof. W. Zawadowski