Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Aus der Vorbereitung einer Unterrichtsreihe für die Jahrgangsstufe 6

von **Bernd Wollring**, Münster

Zusammenfassung: Berichtet wird über die Entwicklung von Simulationsversuchen im Rahmen der Vorbereitung einer Unterrichtsreihe zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Jahrgangsstufe 6 anhand des "Drei-Türen-Problems", bei dem eine klassische Laplace-Lösung zwar leicht zugänglich ist, aber in der Regel überraschend ist oder nicht geglaubt wird. Ein späterer Bericht wird die Durchführung der Unterrichtsreihe dokumentieren.

Wann und wozu Simulationen?

In Gesprächen und in der Literatur trifft man im Zusammenhang mit dem Begriff "Simulation" im Stochastikunterricht häufig ein Verständnis an, wie es etwa im folgenden Text zum Ausdruck kommt (Kütting S. 105):

> "Die folgenden Gesichtspunkte kennzeichnen die didaktische Bedeutung und den Wert von Simulationsverfahren beim Lösen von Aufgaben:
> 1. Durch Simulation kann man evtl. Aufgaben "lösen", die auf dem erreichten Niveau exakt nicht lösbar sind, weil die Mittel dazu noch nicht zur Verfügung stehen, oder die einer exakten Lösung überhaupt unzugänglich sind.
> 2. Bei Aufgaben, die man exakt gelöst hat, kann man durch Simulation eine experimentelle Bestätigung der Lösung erhalten. Das gibt den Schülern Vertrauen in das angewandte Lösungsverfahren.
> ...
> Das eigentliche Anwendungsgebiet der Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Methoden) ist freilich die Lösung stochastischer Probleme, deren Komplexität eine rechnerische Lösung nicht zuläßt.
> Im Unterricht sollte man im übrigen immer anstreben, eine durch Simulation gelöste Aufgabe auch exakt zu lösen, sofern dies möglich ist."

Zitiert werden dazu zwei entsprechend "fortgeschrittene" Beispiele.

Diese Ansicht, obgleich zutreffend, erscheint uns in wesentlichen Punkten ergänzungsbedürftig: Im Mittelpunkt steht hier die sogenannte "exakte Lösung". Simulationen sind offenbar erst gefragt, wenn ohne Experimente mit hohen Versuchszahlen kein brauchbares Ergebnis zu erzielen ist oder wenn zunächst keine Modellbildung zur Verfügung steht. Sie erscheinen hier gegenüber der sogenannten "exakten Lösung" geringer eingeschätzt, was auch die Wortwahl zu belegen scheint. Insbesondere die Möglichkeiten, mit Simulationen vorbereitende individuelle Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und damit Fehleinschätzungen sowohl im Bereich der Modellbildung als auch im Bereich der Schlußweisen revidieren zu können, scheinen hier nicht hinreichend gewürdigt, ebensowenig die Motivationsmöglichkeiten entsprechender Spiele (siehe etwa Grünewald (1991)). Die Frage der Angemessenheit der Modellannahmen in "exakten Lösungen" wird hier nicht angesprochen, sie wäre nur durch Simulationen zu lösen.

Wir vertreten die Ansicht, daß bei einem Einstieg über Betrachtungen zur Gleichwahrscheinlichkeit wesentliche Bestandteile des Wahrscheinlichkeitsbegriffs unreflektiert bleiben können: **Der eigentliche Charakter des Zufalls wird erst durch die Simulation, die wiederholte Versuchsdurchführung, erfahrbar und erfahren.** Auch die in einigen Lehrbüchern vorgelegten Urlisten zu Versuchsdurchführungen können dies nicht ersetzen, es kommt nach unserer Auffassung wesentlich darauf an, daß **Lernende die Versuche selbst durchführen und die Entwicklung ihrer Einschätzungen während der Versuchsdurchführung erleben.** Schwierigkeiten im Umgang mit der Wahrscheinlichkeit sind nach unserer Meinung oft auf **Erfahrungsdefizite mit Versuchswiederholungen, insbesondere mit hinreichend langen Versuchsserien** zurückzuführen, wie etwa die als "gamblers fallacy" bekannten ausgleichenden Annahmen bei Voraussagen in "kurzen" Versuchsserien.

Im folgenden wollen wir an einem einführenden Beispiel darlegen, daß Simulationen und der frequentistische Zugang zu Wahrscheinlichkeiten nicht erst interessant werden, wenn ein "exaktes Modell" nicht erreichbar ist oder seine Konzeption auf unerwartete Schwierigkeiten stößt. Auch die organisatorischen Probleme im Unterricht scheinen uns lösbar. Deutlich soll werden, daß bei der Entwicklung und Diskussion von Simulationen gemeinsam mit den Lernenden konstitutive Erkenntnisse zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zu gewinnen sind, die auch in die Neuorganisation weiterer Simulationsversuche konstruktiv eingehen können.

Die Arbeitssituation: Studierende bereiten den Unterricht vor

Wir berichten über die Auseinandersetzung von Studierenden mit dem Problem, Simulationen für eine einführende Unterrichtsreihe zum Wahrscheinlichkeitsbegriff vorzubereiten, die in der Jahrgangsstufe 6 eines Gymnasiums im Rahmen eines fachdidaktischen Praktikums geplant sind.

Vom Lehrer vorgegeben ist, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff operativ erarbeitet werden soll. Seine Zielvorstellung ist die Verfügbarkeit des Baumdiagramms zur Beschreibung zweistufiger Zufallsexperimente. Bruchrechnung kann bei den Schülern "bis zu einem gewissen Grade", so der Lehrer, vorausgesetzt werden. Die von ihm gewünschte Verwendung des Baumdiagramms ist nicht notwendig an das Arbeiten mit einem Laplace-Ansatz gebunden, auch eine Kombination von Simulationen und Baumdiagrammen ist als Einstieg möglich.

Studierenden eines Seminars zur Didaktik der Stochastik für die Lehrämter der Primarstufe und der Sekundarstufen mit geringen Vorkenntnissen zur Stochastik wurde diese Problemsituation vorgelegt mit der Aufgabe, das folgende Spielproblem selbst zu erschließen und Erschließungsmöglichkeiten für die Jahrgangsstufe 6 zu diskutieren. Wir wollen wie in einer Fallstudie den Erkenntnisgang dieser Studierenden dokumentieren und deuten.

Das "Drei-Türen-Problem"

Als zentrales Problem der Unterrichtsreihe ist das "Drei-Türen-Problem" vorgesehen. Die früheste uns bekannte Version findet man bei Gardner (1966). Es wurde im August 1991 in der Zeitschrift "Der Spiegel" wohl auch als Reaktion auf vorhergehende Diskussionen in der Wochenzeitung "Die Zeit" aufgenommen und in Leserzuschriften kommentiert (siehe [10]). Eine weitere Bearbeitung fanden wir bei Stewart mit zum Teil sehr aufgebrachten Leserzuschriften auf eine amerikanische Kolumne "Fragen Sie Marilyn" (Stewart (1991)). Interessante Anmerkungen zur Geschichte dieses Problems findet man bei Borovcnik (1991). Wir stellen das Problem in folgender Form:

In einem Quiz wird ein Spieler vor drei Türen gestellt. Hinter einer verbirgt sich als Gewinn ein Auto, hinter zweien als Niete jeweils eine Ziege. Gespielt wird in folgenden Schritten:

S0 Vor Spielbeginn werden das Auto und die Ziegen hinter den Türen plaziert, und damit die Ausgangssituation festgelegt.

S1 Im ersten Schritt wählt der Spieler eine der drei Türen, hinter der er das Auto vermutet; die Tür bleibt ungeöffnet.

S2 Im zweiten Schritt öffnet der Spielleiter eine der anderen beiden Türen, hinter der sich eine Ziege befindet.

S3 Im dritten Schitt kann der Spieler die ursprünglich gewählte noch nicht geöffnete Tür beibehalten oder statt dessen die andere noch nicht geöffnete Tür wählen.

Nun folgt die Frage: Hat der Spieler eine größere Chance, das Auto zu gewinnen, wenn er im dritten Schritt die zuerst gewählte Tür beibehält, oder hat er eine größere Chance, das Auto zu gewinnen, wenn er im dritten Schritt die erste Wahl ändert und die Tür wechselt?

Erste Einschätzungen: Spaltung der Meinungen und Begründungen

Dieses Problem und seine Lösung war den beteiligten Studierenden bis auf eine Studentin nicht bekannt. Diese Studentin äußerte: "Ich habe das gelesen, aber (die Lösung) nicht verstanden." Bei einer ersten Einschätzung nach rund 10 Minuten Diskussion zerfiel die Gruppe der etwa 20 Studierenden in zwei nahezu gleich große Teile:

- Die Gruppe der "Nichtwechsler" vertrat die Ansicht, daß sich die Gewinnchance durch den Wechsel der Wahl im dritten Spielschritt nicht ändert.
- Dagegen vertrat die andere Gruppe der "Wechsler" die Ansicht, das Wechseln würde die Gewinnchance erhöhen.

Die Nichtwechsler versuchten durchweg, ihre Meinung zu begründen. Repräsentativ für viele Begründungsversuche ist folgende wörtliche Äußerung von RUTH: "Im dritten Schritt kann ich meine Tür beibehalten und habe damit eine von zwei möglichen Türen gewählt. Ich kann wechseln und habe damit die andere von zwei möglichen Türen gewählt. Und weil beide Türen nach dem Öffnen der dritten Tür mit der Ziege gleich wahrscheinlich sind, habe ich eine Chance von 50%, das Auto zu gewinnen, egal ob ich wechsele oder nicht."

Die Gruppe der Wechsler tat sich mit der Begründung ihrer Ansicht wesentlich schwerer, war sich ihrer Meinung aber sehr sicher. Der Begründungsversuch von CHRISTINA beruhte darauf, das analoge Problem mit 10 Türen zu betrachten, war aber in der folgenden wörtlichen Formulierung für die anderen nicht überzeugend: "Beim Öffnen der Nietentüren vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit immer mehr, den Hauptgewinn zu erlangen. Zu dem Zeitpunkt, wo nur noch 2 Türen übrig sind, hat sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen hinter der Tür konzentriert, die als letzte vom Spielleiter noch nicht geöffnet wurde. Bei einem Wechsel der Tür würde der Kandidat seine Gewinnchance von vorher $^1/_{10}$ auf $^9/_{10}$ verbessern."

Im Zusammenhang mit der aus der Fernsehshow "Let's make a deal" herrührenden Popularität des Problems wird berichtet, daß die "exakte Lösung" zwar von der Kolumnistin Marilyn vos Savant ("mit dem Intelligenzquotienten 228") vertreten wurde, als Reaktion darauf aber eine scharfe Polarisierung der Meinungen erfolgte bis hin zu würzigen Grobheiten (Stewart (1991)). Journalisten, für die die "exakte Lösung" offensichtlich keine endgültige Überzeugungskraft hatte, arrangierten zur Entscheidung über die Richtigkeit eine medienwirksame "Simulation" (siehe [10]). Wenn allerdings, wie berichtet, jeweils nur 10 Einzelversuche mit und ohne Wechsel durchgeführt wurden, so lassen sich daraus keine brauchbaren Einschätzungen ableiten, wie wir weiter unten darlegen.

Erster Simulationsversuch: Rollenspiele ohne Strategie

Es hätte sich nun angeboten, das Problem ausgehend von Symmetrieannahmen zur Wahrscheinlichkeit zu lösen. Statt dessen sollten die Studierenden zunächst Simulationen des Problems durchführen. Als Hilfen wurden organisatorische Hinweise gegeben: Die Studierenden sollten paarweise arbeiten, einer übernimmt die Rolle des "Spielleiters", der andere die Rolle des "Spielers". Beide sollten jeweils mit parallelen und in der Form identischen Protokollen arbeiten, ähnlich wie bei dem Spiel "Schiffe versenken", das alle kannten. Der Spielleiter sollte jeweils eine Tür als die vor dem Auto wählen und dann in einem wechselnden Frage- und Antwortspiel mit dem Spieler zusammen die Versuche durchführen. Nähere Erläuterungen gab es auf dieser Stufe nicht. Hinzugefügt wurde lediglich, daß versucht werden sollte, mindestens zehn Spiele durchzuführen.

Es gelang den Studierenden, die zehn Spiele zu organisieren, dabei entstanden originelle individuelle Organisations- und Protokollformen. Insbesondere die Spielleiter versuchten als Personen, "sich möglichst zufällig zu verhalten". Die Spieler dagegen versuchten, Strategien mit Vorteilen zu finden. Da sie aber zunächst alle im Schritt S3 unsystematisch zwischen Beibehalten und Wechseln der zuerst gewählten Tür schwankten, konnten sie aus den Ergebnissen ihrer zehn Versuchsspiele keine Informationen ableiten.

Erst das parallele Betrachten aller durchgeführten 100 Spiele der gesamten Gruppe führte zu einem tendenziellen Ergebnis, das allerdings niemand quantitativ interpretieren mochte. Bemerkt wurde, daß man bei nur zehn Spielen die "Spiele mit Wechsel" und die "Spiele ohne Wechsel" gar nicht richtig unterscheiden könne. Es wurde abgelehnt, die parallel erstellten Zehnerserien zu einer Hunderterserie zu bündeln, dies sei "verfahrenstechnisch nicht einwandfrei".

Zweite Simulation: Rollenspiele mit Strategien

Nach längerer Diskussion wurde folgende verbesserte Organisation der Versuche vorgeschlagen: Jedes Paar sollte zweimal zehn Spiele simulieren, nun aber die erste Zehnerserie ausschließlich ohne Wechsel im Spielschritt S3, die zweite Zehnerserie ausschließlich mit Wechsel. Weiterhin wurde vorgeschlagen, die Spielserien zu verlängern, eine quantitative Angabe erfolgte nicht. Da die Studierenden inzwischen auf die Simulationstechnik eingespielt waren, benötigten sie für diese zwei Simulationsserien nacheinander annähernd genauso lange wie für die erste einzelne Zehnerserie, rund drei Minuten.

Die zunehmende Fähigkeit der Studierenden, wesentliche und unwesentliche Elemente der Versuchsdurchführung voneinander zu unterscheiden und von der Szene des Spiels zu abstrahieren, wird unter anderem in der Entwicklung der individuellen Protokollformen sichtbar. Als typisches Beispiel stellen wir die Protokolle von MARIA vor.

Abb. 1 zeigt ihr Protokoll der ersten zehn Versuche "mit Wechsel". Es ist nahezu vollständig ikonisch organisiert und orientiert sich stark am szenischen Ablauf. Das in das Kästchen eingesetzte Ikon stellt das vom Spielleiter plazierte Auto dar (S0), das Kreuz bezeichnet die erste Wahl des Spielers (S1), das "ö" die geöffnete Tür (S2), der Pfeil die abschließend gewählte Tür (S3). Das Ergebnis ist zusätzlich rechts ein zweitesmal ikonisch notiert. Abb. 2 zeigt ihr Protokoll der zweiten zehn Versuche "ohne Wechsel". Die ikonische Markierung der Türen ist ganz entfallen. Ab Schritt 2 entfällt das Protokollieren der geöffneten Tür. Ab Schritt 4 wird die ikonische Notierung des Ergebnisses durch eine symbolische ersetzt. Bei weiteren Versuchen kehrte MARIA nicht mehr zu ikonischen Notierungen zurück.

Nach Abschluß dieser beiden Versuchsserien wurden die Studierenden vor dem Vergleich der Ergebnisse zunächst gefragt, ob sie bei ihrer ursprünglichen Einstellung bleiben würden. Es ergab sich nun ein leicht geändertes Meinungsbild, das etwa folgende Tendenz hatte:

- Das Wechseln wurde bei $^3/_4$ der Teilnehmer nun als günstiger eingeschätzt.
- wogegen $^1/_4$ nach wie vor den Standpunkt der Nichtwechsler vertrat.

Bei dem Vergleich der Ergebnisse stellten sich bei den Serien mit Wechsel als Gewinnzahlen Zahlen zwischen 4 und 7 heraus mit einem deutlichen Schwerpunkt auf der 5. Bei den Serien ohne Wechsel dagegen streuten die Ergebnisse von 0 bis 5 mit einem deutlichen Schwerpunkt auf der 3.

Das Zusammenfassen der Zwanzigerserien zu einer Zweihunderterserie wurde von den Studierenden wieder abgelehnt. Sie hatten offenbar ein Verständnis dafür entwickelt, daß nur Versuche unter gleichbleibenden Bedingungen aussagekräftig sind und vermuteten personentypische Unterschiede in den Serien.

Die Frage nach der Glaubwürdigkeit der Ergebnisse und nach möglichen Strategien bei den Spielern gegenüber den Spielleitern wurde zugegeben: "Ich habe möglichst versucht zu raten, wo der Spielleiter das Auto plazieren würde." An diese Bemerkung

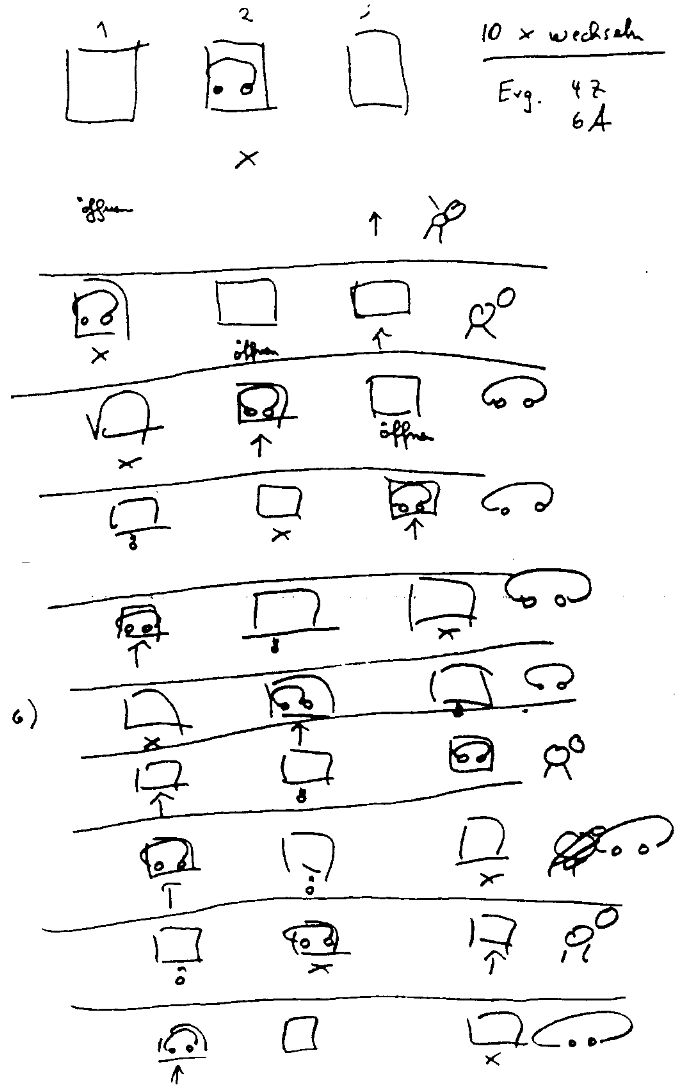

Abb. 1: MARIAS Protokoll ihrer ersten zehn Versuche "mit Wechsel"

schloß sich eine Diskussion darüber an, daß die Aufeinanderfolge bei der Auswahl der jeweiligen Gewinn-Tür durch den Spielleiter sicherlich von subjektiven Einstellungen und vielleicht unbewußt vollzogenen Ausgleichseffekten gesteuert sei. Dies könne da-

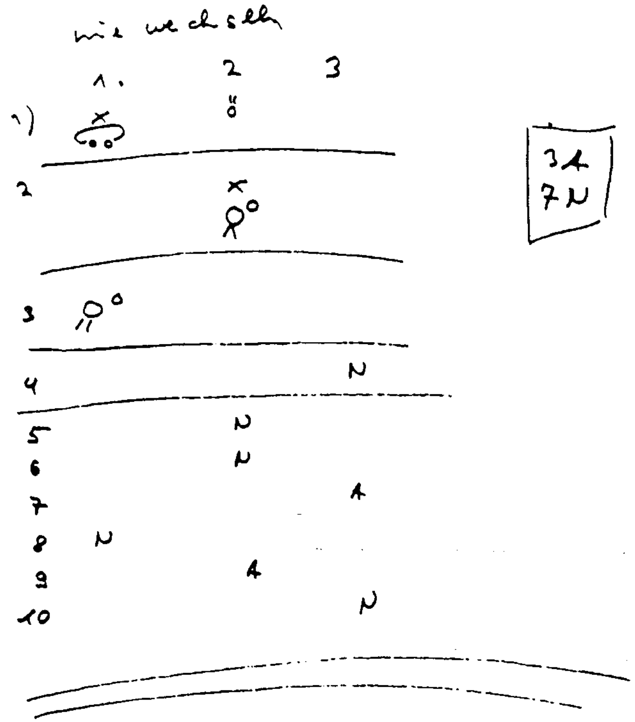

Abb. 2: MARIAS zweites Protokoll ihrer zweiten zehn Versuche "ohne Wechsel"

zu führen, daß eventuell Strategieelemente des Spielleiters zu erraten seien, da der Spielleiter durch seine Mimik eine Reaktion auf sein eigenes Verhalten artikuliert.

Dieses für den Spieler vorteilhafte Verhalten wurde für die Aussagekraft der Ergebnisse bezüglich der Fragestellung als Störquelle aufgefaßt. Ein erstes Vorverständnis für die bei dieser Simulation erforderliche stochastische Unabhängigkeit von Spielleiter und Spieler deutete sich an.

Die weitere Diskussion führte nun darauf, die Wahl der Gewinn-Tür durch den Spielleiter mit einem "neutralen" Zufallsgenerator zu simulieren. Von den technischen Realisierungen für den Unterricht wurde nach einiger Diskussion verlangt, daß sie leicht zu benutzen und möglichst bequem und unkompliziert verfügbar sind, genügend genau arbeiten, im Rahmen der Nachprüfbarkeit stochastisch unabhängige Einzelergebnisse liefern und hinreichend genau stochastisch kopierbar sind. Vorgeschlagen wurden etwa Papierlose oder Perlen in einer Urne oder Würfel in einem geschlossenen Gefäß (Wollring (1991)). Die jeweils verwendeten Zufallsgeneratoren beschreiben wir weiter unten.

Es wurde festgestellt, daß es bei "neutralem" Festlegen der Tür, hinter der sich das Auto befindet, möglich ist, die Ergebnisse der verschiedenen Zehnerserien der Spielleiter zu einer Hunderterserie zusammenzufassen, ''um eine zuverlässigere Aussage zu erhalten''.

Es wurde auch als unproblematisch angesehen, die Einschätzungen der Spieler zusammenzufassen, da die Meinung vorherrschte, daß die Spieler jetzt, da sie aus der Beobachtung des Spielleiters keine Schlüsse mehr ziehen konnten, bei der Auswahl der ersten Tür keine personengebundenen unterschiedlichen Präferenzen haben würden. Eine Vermutung in die Richtung, daß verschiedene Zufallsgeneratoren verschiedene Versuchsbedingungen darstellen, wurde nicht geäußert.

Die Frage nach den Gewinnchancen aufgrund der bislang vorliegenden und nun allen bekannten Simulationsergebnisse wurde so beantwortet:

- ''vermutlich Gewinnchance $^1/_3$, wenn nicht gewechselt wird'' und
- ''vermutlich Gewinnchance $^1/_2$, wenn gewechselt wird''.

Die Komplementarität dieser Fälle wurde anhand der bisher erfolgten kurzen Versuchsserien offenbar noch nicht erkannt.

Die ''exakte Lösung''?

Es folgte nun die Aufforderung, das Problem mit Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgrund von Symmetrieannahmen zu lösen, dazu gab es den Hinweis, daß das Problem als zweistufiges Zufallsexperiment aufzufassen und mit einem Baumdiagramm zu erschließen sei, ferner, daß es keine arithmetischen Kompetenzen erfordert, die über den Horizont der Jahrgangsstufe 6 hinausgehen. Die Schwierigkeit läge vielmehr darin, einen geeigneten Ergebnisraum und eine geeignete Wahrscheinlichkeitsfunktion zu finden.

Auf die Frage nach möglichen Ergebnisräumen wurde zunächst der Ergebnisraum

$$\Omega = \{\text{''Auto''}, \text{''Ziege''}\}$$

genannt und nach einigem Zögern festgestellt, daß er von seiner Struktur her keine Hilfestellung bei der Erschließung des Problems bieten würde, ''da er die Zwischenschritte nicht beschreibt''. Es folgten zunächst erfolglose Strategien über abgestuftes Zählen der Türen (siehe auch Hefendehl-Hebecker und Törner (1984)). Dies beruht wohl darauf, daß die Ergebnisse bei den Simulationen vorwiegend mit den Bezeichnungen der Türen formuliert werden. Korrekte Ergebniszählungen über die Türen findet man u.a. bei Borovcnik (1991), Stewart (1991) und Warmuth (1991b).

Fortschritt brachte der Vorschlag, die Ergebnisse so zu kodieren (Originalformulierung):

$$\Omega = \{\text{"Auto mit Wechsel"}, \text{"Auto ohne Wechsel"}, \text{"Ziege mit Wechsel"}, \text{"Ziege ohne Wechsel"}\}.$$

Obwohl dies bereits eine brauchbare Kodierung war, brachte sie die Studierenden zunächst nicht weiter. Erst die Darstellung

$$\Omega = \{AA, AZ, ZA, ZZ\}$$

brachte zusammen mit der Organisation eines passenden Baumdiagramms mit Wahrscheinlichkeiten und Anwenden der Pfadregeln die gewünschten Wahrscheinlichkeiten dieser vier Ergebnisse. Sie waren auch nach den bisherigen Versuchsergebnissen für einige Studierende noch überraschend. Die Beantwortung der Frage "Wechsel - ja oder nein?" erfolgte mit Argumenten, die mehr oder weniger bedingten Wahrscheinlichkeiten entsprachen. Der Vorschlag, dieses Baumdiagramm auch zum Protokollieren der Versuchsergebnisse zu benutzen, wurde nicht unterbreitet!

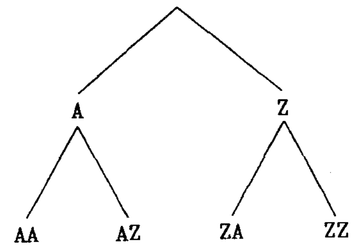

Abb. 3: Vorgeschlagenes Baumdiagramm

Die Studierenden hatten in diesem Stadium noch Probleme, die Tatsache zu akzeptieren, daß durch einen bewußt vorgenommenen Wechsel die möglichen Ergebnisse auf AZ und ZA eingeschränkt waren. Erst nach einer längeren Erarbeitungsphase wurden die folgenden bislang teilweise miteinander verwechselten korrekten Befunde mit Hilfe des Baumdiagramms und der Pfadregeln aufgestellt:

B1 Die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, wenn der Spieler bei Wechsel oder Nichtwechsel der Erstwahl keine Präferenzen hat, ist gleich 1/2.

B2 Die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, wenn der Spieler die Erstwahl grundsätzlich nicht wechselt, ist 1/3.

B3 Die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, wenn der Spieler die Erstwahl grundsätzlich wechselt, ist 2/3.

Dritte Simulation: Rollenspiele ausschließlich mit Zufallsgeneratoren

Es zeigte sich, daß bei den Studierenden auch nach der Diskussion der Wahrscheinlichkeiten anhand des Baumdiagramms ein deutlicher Bedarf bestand, diese als unerwartet empfundenen Ergebnisse im nachhinein erneut durch Simulation zu prüfen.

Es wurden nun diverse Vorschläge unterbreitet, die nach Meinung der Studierenden die Aussagekraft der Simulationen steigern sollten:

- **Beide** beteiligten Personen, der Spielleiter und der Spieler, sollten durch "neutrale Zufallsgeneratoren" simuliert werden, beide Personen wechseln damit von der Spielerrolle in die Beobachterrolle. Die Zufallsgeneratoren dürften "sich nicht gegenseitig beeinflussen".
- Ein Vorschlag besagte, nur den Spielleiter durch einen neutralen Zufallsgenerator zu simulieren und den Spieler im ersten Schritt S1 **stets die linke Tür wählen** zu lassen. Dieser Vorschlag bewegt sich im Rahmen der Spielregeln, unklar war zunächst, ob er zu demselben Ergebnis führt wie der vorhergehende Vorschlag, was zutrifft.
- Die Versuchsserien sollten unter gleichbleibenden Bedingungen bei den Einzelversuchen, also insbesondere **stets mit demselben Zufallsgenerator** stattfinden und "hinreichend lang" sein, vermutet wurde "mindestens 50".
- Das Verhalten des Spielers im Schritt S3 sollte mit drei **verschiedenen Strategien** simuliert werden: Mit konsequentem Nichtwechseln, mit konsequentem Wechseln oder mit zufälliger Entscheidung zum Wechseln, simuliert ebenfalls durch einen neutralen Zufallsgenerator, etwa durch eine Münze.

Beibehalten wurde das paarweise Arbeiten mit wechselnder Rollenverteilung "Simulieren" und "Protokollieren". Als Zufallsgeneratoren wurden Urnen mit 3 Kugeln und Würfel mit passender Zufallsgröße gewählt. Sie wurden im Sinne der oben genannten Anforderungen als geeignet und schnell genug für Schülerarbeit im Unterricht eingeschätzt.

Taschenrechner wurden besonders in Hinsicht auf die vorgesehene Schulstufe, aber auch aus grundsätzlichen Erwägungen als Zufallsgeneratoren abgelehnt: Die "Zufälligkeit der Zufallszahlen" wurde von fast allen Beteiligten in Zweifel gezogen, insbesondere wurde ohne Bezugnahme auf den definierten Begriff die "Unabhängigkeit der Einzelergebnisse voneinander" bezweifelt. Als störend wurde empfunden, daß man durch Rechnen oder Programmieren das angezeigte Ergebnis erst in das gewünschte übersetzen müsse. Der Lehrer vertrat unter den hier bestehenden Bedingungen die gleiche Meinung: "Die Zufallsgeneratoren müssen für die Schüler durchschaubar sein."

Aus dem Vergleich der individuellen Protokolltechniken bei den vorhergehenden Simulationen und als Entwurf für Simulationen mit den Schülern entstand nun der in Abb. 4 im Ausschnitt gezeigte standardisierte Protokollbogen im Format DIN A4 für je 30 Einzelversuche. Zu jedem Einzelversuch werden die Plazierung des Autos durch den Spielleiter (S0) und die erste Wahl der Tür durch den Spieler (S1) durch Ankreuzen notiert. Diese Protokolltechnik funktioniert schnell genug, um der Simulation folgen zu können. Unterstrichen markiert wird die geöffnete Tür (S2), simultan oder in einem zweiten Arbeitsgang. Rechts daneben ist Raum zum Eintragen der Spielergebnisse ("gewonnen", "verloren", etc.) und spezieller Bedingungen und Strategien (S3).

Versuche zum Drei-Türen-Problem

	Spielleiter setzt Auto	Spieler wählt	
1	[□ □ □]	[□ □ □]	______
2	[□ □ □]	[□ □ □]	______
...			
30	[□ □ □]	[□ . □ □]	______

Abb. 4: Standardisierter Protokollbogen zum Drei-Türen-Problem (Ausschnitt)

Zunächst wurden nun "kurze" Serien aus zweimal 30 Versuchen durchgeführt, später nach Betrachtungen zu Serienlängen "lange" Serien aus je 300 Versuchen.

Bei den Serien zu je 30 Versuchen wurden Spielleiter und Spieler jeweils durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 3 Kugeln simuliert. Realisiert wurde eine solche Urne durch Fläschchen aus Klarglas mit Kronkorkenverschluß (100 ml, Verpackung für Kaffeesahne). Es enthält drei verschiedenenfarbige Holzperlen gleicher Größe, die die Türen codieren (L: links, M: Mitte, R: rechts). Verschlossen ist es mit einem passenden Plastikkäppchen. Wählt man den Durchmesser der Perlen geeignet, so liegt nach Schütteln und Umdrehen des Fläschchens genau eine Perle soweit unten, daß sie die Kappe innen berührt. Diese Perle gilt als "gezogen" (Wollring (1991)). Die Fläschchen sind zur Unterscheidung numeriert und werden als Urne i[L,M,R] bezeichnet.

Einige Ergebnisse sollen vorgestellt werden, da sie Anlaß zu fruchtbaren Fragen und Bemerkungen waren.

Offensichtlich eindeutig: die Versuche von SANDRA und SYLVIA

Erste Serie: 30 Versuche, 4 min
Spielleiter simuliert mit Urne 1[L,M,R],
Spieler simuliert mit Urne 6[L,M,R]

	Spielleiter setzt Auto	Spieler wählt	*Spieler wechselt nicht*	*Spieler wechselt*
1	[☐ ☐ ☒]	[☐ ☒ ☐]	0	1
2	[☐ ☒ ☐]	[☒ ☐ ☐]	0	1
...				
30	[☒ ☐ ☐]	[☐ ☒ ☐]	0	1
	10 07 13	09 10 11	09 Gewinne	21 Gewinne

Abb. 5: Ausschnitt aus dem 1. Protokollbogen von SANDRA und SYLVIA

Zweite Serie: 30 Versuche, 4 min
Spielleiter simuliert mit Urne 6[L,M,R],
Spieler simuliert mit Urne 1[L,M,R]

	Spielleiter setzt Auto	Spieler wählt	*Spieler wechselt nicht*	*Spieler wechselt*
1	[☐ ☐ ☒]	[☐ ☒ ☐]	0	1
2	[☐ ☐ ☒]	[☐ ☐ ☒]	1	0
...				
30	[☐ ☐ ☒]	[☐ ☐ ☒]	1	0
	06 10 14	07 10 13	13 Gewinne	17 Gewinne

Abb. 6: Ausschnitt aus dem 2. Protokollbogen von SANDRA und SYLVIA

Beide Serien belegten nach Meinung von SANDRA und SYLVIA, daß die Gewinnchance beim Wechseln größer ist. Gefragt, ob man die Serien zusammenfassen dürfe, verneinten sie zunächst, entdeckten aber dann, daß das Vertauschen der Ergebnisse von Spielleiter und Spieler in einer Serie das Ergebnis bei den Gewinnen gar nicht beeinflußt. Sie konnten daher eine zusammengefaßte Serie der Länge 60 mit folgendem Ergebnis bilden:

15 20 25 17 17 26 22 Gewinne 38 Gewinne

Dies bestätigte ihre Meinung, und sie hielten dies für zuverlässiger als die Ergebnisse bei den Serien der Länge 30.

Die Analyse mit den Informationen des folgenden Abschnitts zeigte, daß aus diesen Ergebnissen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=5\%$ nur mit der Genauigkeit $\varepsilon=\pm0.175$ geschätzt werden kann:

$0.192<p_{NW}<0.542$ für die Gewinnchance bei Nichtwechsel

$0.458<p_{W}<0.808$ für die Gewinnchance bei Wechsel.

Damit können $p_{NW}=\frac{1}{2}$ und $p_W=\frac{1}{2}$ aufgrund dieser Versuchsergebnisse nicht abgelehnt werden.

Dies wurde erst akzeptiert, als die Studierenden die Ergebnisse mehrerer Serien der Länge 60 mit verschiedenen Ergebnissen nebeneinander sahen und auffaßten, daß ihr Serienergebnis eines von vielen möglichen war. Sie hielten es allerdings kaum für möglich, daß ihr Ergebnis bei Vorliegen von $p_{NW}=\frac{1}{2}$ und $p_W=\frac{1}{2}$ auftritt.

Fehlschluß möglich: die Versuche von DIRK und RUTH

Erste Serie: 30 Versuche, 4 min
Spielleiter simuliert mit Urne 2[L,M,R],
Spieler simuliert mit Urne 3[L,M,R]

	Spielleiter setzt Auto	Spieler wählt	*Spieler wechselt nicht*	*Spieler wechselt*
1	[☐ ☐ ☒]	[☐ ☐ ☒]	1	0
2	[☒ ☐ ☐]	[☐ ☐ ☒]	0	1
...				
30	[☒ ☐ ☐]	[☐ ☐ ☒]	0	1
	10 11 09	15 07 08	14 Gewinne	16 Gewinne

Abb. 7: Ausschnitt aus dem 1. Protokollbogen von DIRK und RUTH

Zweite Serie: 30 Versuche, 4 min
Spielleiter simuliert mit Urne 3[L,M,R],
Spieler simuliert mit Urne 2[L,M,R]

	Spielleiter setzt Auto			Spieler wählt			*Spieler wechselt nicht*	*Spieler wechselt*
1	[☐	☒	☐]	[☒	☐	☐]	0	1
2	[☐	☐	☒]	[☐	☒	☐]	0	1
...								
30	[☐	☐	☒]	[☐	☒	☐]	0	1
	11	10	09	10	08	12	14 Gewinne	16 Gewinne

Abb. 8: Ausschnitt aus dem 2. Protokollbogen von DIRK und RUTH

Diese Ergebnisse von DIRK und RUTH sind authentisch und waren für den Autor eine Überraschung. Ganz analog, nur mit anderem Befund, werteten DIRK und RUTH ihre Ergebnisse aus: Sie hielten die Gewinnchance bei Wechsel und Nichtwechsel für gleich groß, die kleine Abweichung hielten sie für "Zufall". Auch sie entdeckten auf die Frage, ob man die Serien zusammenfassen dürfe, daß das Vertauschen der Ergebnisse von Spielleiter und Spieler in einer Serie das Ergebnis bei den Gewinnen nicht beeinflußt und faßten daher die Serien zu einer Serie der Länge 60 mit folgendem Ergebnis zusammen:

26 17 17 20 19 21 28 Gewinne 32 Gewinne

Auch sie sahen ihre Meinung durch dieses Ergebnis bestätigt, und sie hielten es für zuverlässiger als die Ergebnisse bei den Serien der Länge 30.

Hier ergab die Analyse, daß aus diesen Ergebnissen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=5\%$ nur mit der Genauigkeit $\varepsilon=\pm 0.175$ geschätzt werden kann:

$0.292<p_{NW}<0.642$ für die Gewinnchance bei Nichtwechsel

$0.358<p_{W}<0.708$ für die Gewinnchance bei Wechsel.

Damit können $p_{NW}={}^1/_3$ und $p_W={}^2/_3$ aufgrund dieser Versuchsergebnisse nicht abgelehnt werden.

Auch dies wurde erst akzeptiert, als sie die Ergebnisse mehrerer Serien der Länge 60 mit verschiedenen Ergebnissen auffaßten, daß ihr Serienergebnis eines von vielen möglichen war. Sie hielten es wie die beiden anderen kaum für möglich, daß ihr Ergebnis bei Vorliegen von $p_{NW}={}^1/_3$ und $p_W={}^2/_3$ auftritt. RUTH hatte zu Beginn der Simulationen den Standpunkt der "Nichtwechsler" vertreten.

Sagt der Spielleiter vor?: Die Versuche von CHRISTINA und ELKE

Durchgehende Serie von 60 Versuchen, 6 min
Spielleiter und Spieler abwechselnd simuliert mit Urne 7[L,M.R]

	Spielleiter setzt Auto			Spieler wählt			*Spieler wechselt nicht*	*Spieler wechselt*
1	[☐	☒	☐]	[☐	☐	☒]	0	1
2	[☐	☒	☐]	[☒	☐	☐]	0	1
3	[☒	☐	☐]	[☐	☐	☒]	0	1
4	[☐	☒	☐]	[☐	☒	☐]	1	0
5	[☐	☒	☐]	[☐	☒	☐]	1	0
...								
30	[☐	☐	☒]	[☐	☒	☐]	0	1
	22	26	12	13	22	25	18 Gewinne	42 Gewinne

Abb. 9: Ausschnitt aus den Protokollbögen von CHRISTINA und ELKE

Diese Studierenden hatten einfach den zweiten Zufallsgenerator beiseite gelassen und Spielleiter und Spieler mit demselben Zufallsgenerator simuliert. Hier zeigt die Analyse, daß kleine Abweichungen des Zufallsgenerators von der Gleichverteilung (Bezeichnung der Studierenden: "Schlagseite") quadratisch und daher kaum merkbar in das Endergebnis eingehen, daß aber Verletzung der stochastischen Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Simulationsergebnisse ("Vorsagen") das Ergebnis erheblich beeinflussen kann. Dies hat Konsequenzen für ein angemessenes Benutzen des Zufallsgenerators: "Die Fläschchen sollten bei der Simulation der Einzelversuche jeweils ganz umgedreht werden."

Erst die erneute Durchführung der Simulationen mit Serienlänge 300 überzeugte schließlich die meisten Nichtwechsler vom nunmehr offensichtlichen Fehler ihres Standpunktes.

Das Seminar wurde dazu in vier "Versuchsteams" aufgeteilt, jedes Team sollte 300 Versuche durchführen, protokollieren und auswerten.

Als verbesserter Zufallsgenerator diente nunmehr ein klares Gläschen mit Schraubdeckel (Verpackung für Babynahrung). Es enthält zwei Hexaeder-Würfel aus hartem Plastik, einen blauen (Spielleiter) und einen roten (Spieler), jeder beschriftet mit je zwei Etiketten L, M und R zur Codierung der Türen. Es wird mit dem Deckel nach unten gehalten und einmal kurz aufgeschüttelt, die oben liegenden Würfelseiten zeigen die simulierte

Wahl von Spielleiter und Spieler. Dieser Zufallsgenerator hatte sich in Vorversuchen als sehr schnell, zudem bezüglich Spielleiter und Spieler und bezüglich aufeinanderfolgender Ergebnisse als stochastisch unabhängig erwiesen. Er ist in beiden Eigenschaften den Fläschchen überlegen, insbesondere in der Geschwindigkeit, da Spielleiter und Spieler simultan simuliert werden.

In jedem Team entstand folgende Rollenverteilung:

- Eine(r) bedient den Zufallsgenerator.
- Eine(r) protokolliert durch Ankreuzen in den vorbereiteten Bögen nur die simulierten Wahlen von Spielleiter und Spieler. Ein Bogen nimmt jeweils 30 Ergebnisse auf.
- Die übrigen werten die ausgefüllten Bögen aus: Sie bestimmen die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Teilserien und insgesamt und berechnen die Schätzungen für die gefragten Wahrscheinlichkeiten.
- Diese Rollen werden innerhalb der Teams in eigener Regie gewechselt.

Folgende Simulationen und ihre Protokolle wurden innerhalb der angegebenen Zeiten erstellt, einschließlich der Auswertung lagen alle Ergebnisse nach 20 Minuten vor:

Team I	(8 Stud.)	Sim.-Dauer 13.5 min	$H_{300}={}^{96}/_{300}$
Team II	(5 Stud.)	Sim.-Dauer 12 min	$H_{300}={}^{91}/_{300}$
Team III	(4 Stud.)	Sim.-Dauer 18 min	$H_{300}={}^{91}/_{300}$
Team IV	(7 Stud.)	Sim.-Dauer 14.5 min	$H_{300}={}^{82}/_{300}$

Bei n=300 erhält man bei Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% eine Genauigkeit der Schätzungen von $\varepsilon=\pm0.079$ und so die Befunde:

Team I	$P(p\varepsilon[0.242, 0.398]) \geq 95\%$
Team II	$P(p\varepsilon[0.225, 0.381]) \geq 95\%$
Team III	$P(p\varepsilon[0.225, 0.381]) \geq 95\%$
Team IV	$P(p\varepsilon[0.195, 0.351]) \geq 95\%$

Man kann diese Ergebnisse natürlich nicht als Vorgabe für einen Unterricht in der Unterstufe auffassen, aber es ergeben sich doch wichtige Anhaltspunkte zur Organisation und Auswertung von Simulationen im Unterricht. Insbesondere **die von selbst entstandene arbeitsteilige Organisation** und **die starke aktive Beteiligung aller Lernenden am Experiment** lohnt den Aufwand. Es zeigte sich, daß zunächst Unbeteiligte durch zunehmend differenziertes Arbeiten im Team schließlich ganz in die Aktivitäten eingebunden wurden, ein Effekt, den man auch in der Schule erwarten kann. Auch erst teilweise fertiggestellte Arbeitsergebnisse erzeugen bereits interessante Kommentare, bei zunehmender Fertigstellung der Ergebnisse wurden die Beurteilungen immer kompetenter, auch ohne vorbereitete Fachsprache. Als unbedingt notwendig zeigte sich ferner, daß der **Zufallsgenerator hinreichend schnell** arbeitet.

Wesentliche Überzeugungskraft hatte offenbar die Einsicht, daß **"Gewinn bei Nichtwechsel" bei den Versuchen als komplementär zum "Gewinn bei Wechsel"** ist. Dieser Befund, der ohne die Simulationen nicht erkannt wurde, zusammen mit der Annahme, daß die Chance für "Gewinn bei Nichtwechsel" $^1/_3$ bleibt, überzeugte einen Teil derjenigen Nichtwechsler, die aufgrund der ersten und zweiten Simulationen nicht bereit waren, ihre Ansicht zu ändern. Er ist bereits bei kurzen Versuchsserien gut zu erkennen und wurde von fast allen Studierenden als der wichtigste Zugang zur Lösung des Problems durch die Schüler eingeschätzt.

Auf eine diesbezügliche Nachfrage hin deuteten die Antworten der Nichtwechsler an, daß es ihnen offensichtlich immer noch nicht bewußt war, daß sie die Situation durch die "sichere Entscheidung", stets nicht zu wechseln, entscheidend beeinflußten. Ein Rest von nur teilweise überzeugten Nichtwechslern blieb auch nach der Simulation bestehen.

Versuchsweise wurden einige der Teilserien aus 30 Einzelversuchen mit einem STIRLING-Recorder protokolliert (Giles (1979) und Wollring (1982)), das Ergebnis zeigt Abb. 10. In dem "Magazin" sind die Ergebnisse aller Teilserien mit 30 Einzelversuchen festgehalten, die Abweichung von ½ ist deutlich zu sehen. Dieser Recorder ist schneller als der standardisierte Protokollbogen, aber er dokumentiert nicht mehr vollständig den Spielverlauf. Zudem erscheint es in der Jahrgangsstufe 6 erforderlich, den Umgang mit ihm zunächst an einfacheren Problemen zu üben, damit hier bei den Versuchen keine zusätzliche begriffliche Last auftritt.

Technisches zu Serienlänge und Genauigkeit

Nach Durchführen der Serien mit 60 Versuchen und vor den Serien mit 300 Versuchen wurden die Studierenden über folgende Zusammenhänge von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten informiert, um die Ergebnisse kritisch einzuschätzen:

Bei der Interpretation und Planung von Bernoulli-Serien der Länge n mit k "Treffern" und Trefferchance p im Einzelversuch - um solche handelt es sich hier - sind für die Irrtumswahrscheinlichkeit $P(|H_n-p|)\geq\varepsilon)=\alpha$ folgende Abschätzung hilfreich (Hoeffding (1963)):

$\alpha \leq 1/(4n\varepsilon^2)$ (Bienaymé, Tschebyschew, 185) (1)

$\alpha \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2)$ (Hoeffding, 1963) (2)

Dabei ist $H_n={}^k/_n$ die als Zufallsgröße aufgefaßte relative Häufigkeit der Treffer. Die erste Ungleichung ist im Rahmen der Schulmathematik zu beweisen, die zweite liefert bessere Abschätzungen. Beiden gemeinsam ist der typische Term $n\varepsilon^2$. Fixiert man α=5%,

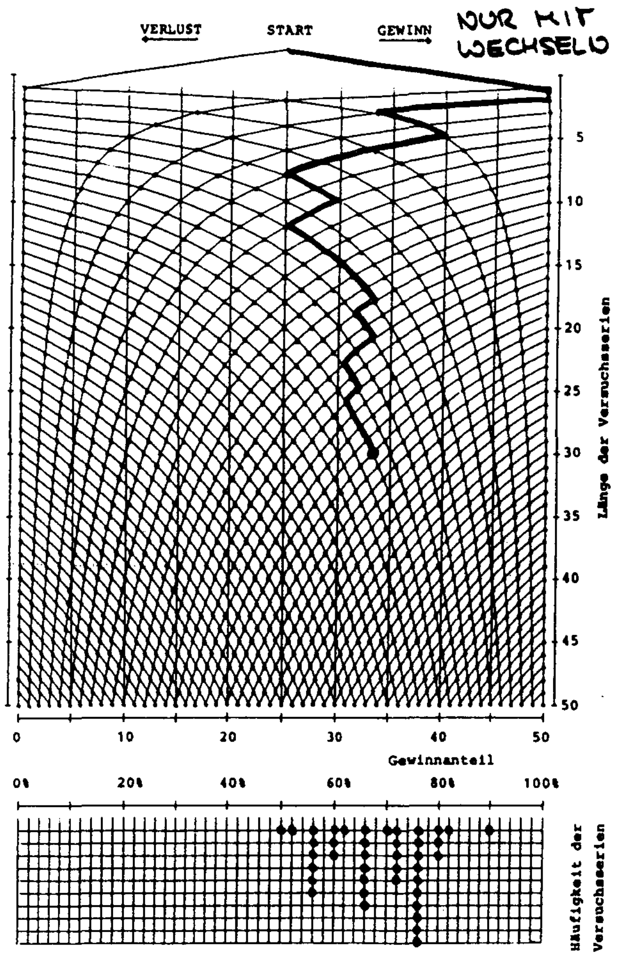

Abb. 10: STIRLING-Recorder mit eingetragenen Ergebnissen

so führt (2) über $(\ln(^2/\alpha))/2 \leq 1.845$ auf die leicht zu merkende Faustregel:

$$1.845 \leq n\varepsilon^2.$$

Will man die Wahrscheinlichkeiten auf dem Signifikanzniveau $\alpha=5\%$ mit der Genauigkeit $\varepsilon=0.1$ schätzen, sollte man also mindestens 185 Einzelversuche unter gleichbleibenden Bedingungen durchführen (Warmuth (1991a)). 10 Versuche liefern nur $\varepsilon=0.429$ und sagen somit nichts aus. 60 Versuche erlauben nur eine Abschätzung mit der Genauigkeit $\varepsilon=0.175$, erst 300 Versuche liefern $\varepsilon=0.079$. Bei Verwenden von

$$H_n-\varepsilon<p<H_n+\varepsilon \iff |H_n-p|<\varepsilon \iff p-\varepsilon<H_n<p+\varepsilon$$

ist zu beachten, daß ε nur die halbe Länge des Intervalls ist.

Obgleich alle Studierenden der Meinung waren, daß man mit längeren Versuchsserien zuverlässigere Ergebnisse erzielt, empfanden sie diese Serienlängen als "überraschend und unerwartet hoch".

Wir haben im Seminar die Hoeffding folgende Abschätzung (2) zitiert und benutzt, da sie ohne Einschränkung für alle $p\varepsilon[0;1]$ gilt. Alle oben angegebenen Längen der Versuchsserien und Abschätzungen der Wahrscheinlichkeiten basieren darauf.

Stellt man a priori Bedingungen an p, so kann man die Abschätzungen verbessern. Approximiert man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung und akzeptiert, daß man unter der Bedingung $\sigma^2=np(1-p)>9$ "brauchbare Werte" erhält (siehe etwa Barth und Haller (1983)), so findet man die als "2σ-Regel" bekannte Abschätzung:

$$\alpha \leq 0.05 \quad \text{für} \quad \varepsilon \geq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Dies ist erfüllt für

$$\varepsilon \geq 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \geq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

wegen $p(1-p) \leq {}^1/_4$ für alle p und führt auf die günstigere Faustregel:

$$1 \leq n\varepsilon^2 \qquad (3)$$

Um aber $np(1-p)>9$ zu sichern, sind **a priori Annahmen zu p unvermeidlich**. Deshalb haben wir diese Technik zurückgestellt. Geht man etwa von der Annahme ${}^1/_3 \leq p \leq {}^2/_3$ aus, **was zu begründen wäre**, so gilt die Faustregel (3) für Versuchsserien der Länge $n \geq 41$. Die erforderlichen Serienlängen fallen auf rund 60% der angegebenen Werte, und die Parameterschätzungen werden bei gleicher Serienlänge entsprechend genauer. Die Befunde wären neu zu überdenken, insbesondere der Befund von DIRK und RUTH.

Befunde und Deutungen

Schwierigkeit und Reiz dieses Beispiels liegen offensichtlich darin, daß falsche Annahmen zunächst ein festes Vorurteil provozieren können. Richtige und falsche sogenannte "exakte Lösungen" haben für viele die gleiche Überzeugungskraft. Die Simulation öffnet hier neue Möglichkeiten zum Befund. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit ist, wie die Versuche zeigten, zur Lösung dieses Problems nicht notwendig.

Man kann in der fortlaufenden Auseinandersetzung mit dem Problem bei den Studierenden deutlich zwei Stufen der Simulationen unterscheiden:

- Die **erste Stufe der Simulationen** folgt direkt den Spielregeln und dem szenischen Ablauf des Versuchs und imitiert diese in Abfolge und Sprachgebrauch im **Rollenspiel der Personen**. Zufallsgeneratoren sind hier die Personen in ihrem Wahlverhalten.
- Bei der zweiten Stufe der Simulationen sind als irrelevant eingeschätzte Spielelemente ausgeblendet, und statt der spielenden Personen entscheiden **"neutrale Zufallsgeneratoren"**. Aus den Diskussionen der Studierenden wurde deutlich, daß hier vielleicht ein doppelter Übergang erfolgt:
  - Simuliert werden soll das Wahlverhalten verschiedener Personen bei diesem Spiel, unsere Zufallsgeneratoren modellieren aber individuelle Wahlkriterien der Personen nicht.
  - Ferner wird als Simulator für die Wahlen eine Zufallsgröße auf einem Würfel herangezogen, weil man eine Laplace-Verteilung seiner Wurfergebnisse annimmt. Ob dies bei dem benutzten Würfel zutrifft, ist ein zweites Problem, es besteht bei jedem Zufallsgenerator.

  Wir lassen hier die Frage offen, ob die Lernenden die Analogie zwischen dem Wahlverhalten eines Spielers und dem Verhalten des Zufallsgenerators direkt annehmen oder ob sie dazu als vermittelnden Begriff den der Wahrscheinlichkeit benötigen.

Bei der mehrstufigen Erarbeitung der Simulationen, der Optimierung ihrer Durchführung und der Steigerung der durchgeführten Einzelversuchszahlen entdeckten die Lernenden mehr und mehr die zugrundeliegenden Modellannahmen und bestätigten oder revidierten sie bei der Neuorganisation von Simulationsdurchläufen. Sie entwarfen Möglichkeiten, etwa Präferenzen bei der Wahl des Spielers oder andere Voraussetzungen in die Konzeption der Zufallsgeneratoren und der Spielorganisation einzubauen und ebenfalls durchzuspielen. Entsprechende Möglichkeiten verbaut man sich oft bei einer zu frühen Forderung nach einem Laplace-Ansatz, zudem verlagert dies die gesamte Problemstellung sehr in den Bereich der Arithmetik.

Als eine Konsequenz aus der beobachteten Entwicklung der Simulationen wollen wir die Lösung eines stochastischen Problems **"exakt"** nennen,

- wenn sie im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung korrekt erstellt ist und
- wenn darüber reflektiert und befunden ist, ob ihre Modellannahmen in der vorliegenden stochastischen Situation gerechtfertigt sind.

Die Frage nach der Berechtigung von Modellannahmen ist für Anfänger bei einem a priori Ansatz in der Regel schwerer zu beantworten als nach einer enaktiv erlebten Simulation. Im Anschluß an die Versuche verfügten die Lernenden nicht nur über eine

vergleichende Beschreibung ihrer individuellen Modellannahmen, sondern auch über ihre Einschätzungen zu deren Auswirkungen auf die Durchführung und die Ergebnisse. Wir vermuten aufgrund der Beobachtungen, daß die Modellannahmen einigen Lernenden überhaupt erst während der Simulation bewußt werden und vor der Versuchsdurchführung noch nicht verfügbar sind.

Zu beobachten ist, daß die Studierenden die Konzeption der Simulation mit allen ihren organisatorischen Erfordernissen zu diesem Problem offensichtlich leichter zuwege brachten als die "exakte Lösung" mit einem Baumdiagramm oder einer anderen Veranschaulichung. Es handelt sich bei diesen Veranschaulichungen offensichtlich um Konzepte, die als eigene Lerninhalte installiert und trainiert sein müssen, um damit erhaltene unerwartete Befunde glaubhaft zu machen (vergleiche Radatz (1986)). Die Veranschaulichung, "das Modell", ist im vorliegenden Fall offenbar aus Vorerfahrung her nicht hinreichend als glaubwürdig bekannt. Ganz offensichtlich hat in einer solchen Grenzsituation für die hier beteiligten Studierenden die Simulation gegenüber der klassischen Lösung die höhere Überzeugungskraft.

Dabei lassen sich Baumdiagramme gut in das Arbeiten mit Simulationen integrieren: Ein mit Strichlisten absoluter Häufigkeiten beschriftetes Baumdiagramm, das man später auf relative Häufigkeiten umstellt, ist eine gut geeignete, wenn auch unter anderen Gesichtspunkten als die hier verwendeten Bögen konzipierte Protokollform der Versuchsserien und eine natürliche Vorlage für Baumdiagramme mit Wahrscheinlichkeiten. Um so überraschender war es für den Autor, daß dieser Weg von den Studierenden nicht vorgeschlagen wurde. Das Protokoll von MARIAS ersten zehn Versuchen "mit Wechseln" und derselben Versuche "ohne Wechseln" hätte vielleicht die Diskussion entscheidend beeinflußt:

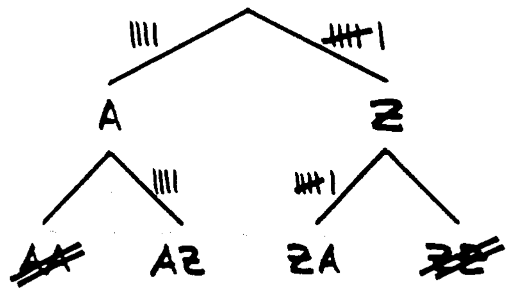

Abb. 11:
Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten. MARIAS Versuche "mit Wechsel"

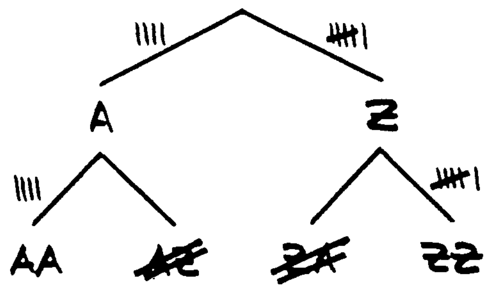

Abb. 12:
Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten, MARIAS Versuche"ohne Wechsel"

Es wurde als möglich befunden, bei geeigneten organisatorischen Voraussetzungen auch mit Schülern der Jahrgangsstufe 6 zu diesem Problem Simulationen mit einer hinreichend hohen Zahl von Versuchen durchzuführen, als Maß wurden 100 Versuche für ein Schülerpaar genannt. Das Rollenspiel wird dabei sicher eine viel größere Bedeutung haben als hier. Es wird zu entscheiden sein, ob man die vollständige Simulationstechnik zunächst an einem "Teilspiel" erarbeitet, oder ob man das komplette Spiel zunächst nur im szenischen Rollenspiel simuliert. Die Durchführung der Unterrichtsreihe in der Jahrgangsstufe 6 findet im WS 1991/92 statt, ein Bericht ist zum Frühjahr 1993 geplant.

Literatur

[1] **Barth, F. und Haller, R.** (1983): *Stochastik Leistungskurs*. München, Ehrenwirth

[2] **Borovcnik, M.** (1991): *Problemecke*. Stochastik in der Schule 11, 46-51

[3] **Gardner, M.** (1966): *Mathematische Probleme und Rätsel*. Braunschweig, Vieweg

[4] **Giles, G.** (1979): *The Stirling Recording Sheet for Experiments in Probability*. Teaching Statistics 1, Vol. 3, übersetzt in: Stochastik in der Schule 2 (1982), H. 2, 3-12

[5] **Grünewald, R.** (1991): *Spielen mit der Wahrscheinlichkeit*. DdM 3, 171-177

[6] **Hefendehl-Hebecker, L. und Törner, G.** (1984): *Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik*. DdM 4, 245-262

[7] **Hoeffding, W.** (1963): *Probability inequalities for sums of bounded random variables*. J. Am. Stat. Ass. 58, 13-30

[8] **Kütting, H. und Lerche, L.** (1989): *Über das Lösen von Aufgaben im Stochastikunterricht*. In: Mathematik, Aufgabenstellen im Stochastikunterricht, AS3: Grundlegende Gesichtspunkte. DIFF, Titel Nr. 01272, Tübingen

[9] **Radatz, H.** (1986): *Anschauung und Sehverstehen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Beiträge zum Mathematikunterricht, 239-242

[10] *Schönheit des Denkens* (1991): Der Spiegel 34, 212-213 / Leserbriefe dazu: Der Spiegel 36, 12-13

[11] **Stewart, I.** (1991a): *Mathematische Unterhaltungen*. Spektrum der Wissenschaft. November, 12-16

[12] **Warmuth, E.** (1991b): *Was ist die Wahrscheinlichkeit? Gedanken zur Erklärung und Entwicklung des Begriffs in der Schule*. DdM 3, 165-170

[13] **Warmuth, E.** (1991): *Mündliche Mitteilung zum Drei-Türen-Problem*. Nov.

[14] **Wollring, B.** (1982): *Bemerkungen zum Stirling'schen Aufzeichnungsblatt für Experimente zur Wahrscheinlichkeit nach G. Giles*. Stochastik in der Schule 2. H. 2, 13-21

[15] **Wollring, B.** (1991): *Zufallsgeneratoren in der Primarstufe und der Sekundarstufe I*. Universität Münster: Paper