Über die fraktale Struktur vielstufiger Zufallsexperimente

Hans G. Schönwald, Siegen

Zusammenfassung: Die in Schulbüchern übliche graphische Darstellung von mehrstufigen Zufallsexperimenten als nach rechts sich verzweigender Baum, erweist sich für manche Beispiele bzw. zur Verdeutlichung gewisser Aspekte als schwierig, und zwar besonders für solche ausführlichen, wie sie häufig bei der Einführung und Einübung verwendet werden. Dies wird mit drei Argumenten ausgeführt; danach werden zwei fraktale Darstellungsmöglichkeiten beschrieben, die eine Verbesserung bieten. Der zeitliche Verlauf eines mehrstufigen Experimentes und die Pfadregel bleiben veranschaulichbar. Abschließend wird die baumartige mit den fraktalen Darstellungsweisen verglichen.

Eine Bemerkung vorweg: Mit der hier vorgeschlagenen Alternative für eine graphische Darstellung vielstufiger Zufallsexperimente soll kein didaktisches Wundermittel propagiert werden. Der Autor besteht auch nicht darauf, daß diese Alternative anstelle der Baumdiagramme insgesamt gesehen den Schülern besser hilft. Vielmehr sind diese fraktalen Darstellungen in einigen wichtigen Unterrichtssituationen von Vorteil, wohingegen sie in anderen wiederum von Nachteil wären. Damit wird einerseits unterstellt, daß es den Unterricht bereichert, wenn die Schüler verschiedene Darstellungsweisen kennenlernen. Aber andererseits soll das nicht auch schon bedeuten, daß die Schüler selbständig jeweils auszuwählen verstehen sollen, welche Darstellung am günstigsten ist.

Erstes Argument: Die Schüler haben Schwierigkeiten, einen mehrstufigen Baum zu malen. Meist wird ihre Zeichnung schon für die Linien und Endpunkte der zweiten Stufe zu eng; manchmal liegen die Endpunkte der ersten Stufe eher auf einem Kreis um den Anfangspunkt als auf einer senkrechten Geraden, sie drängen sich wie die Früchte auf einer Dolde. Beidem kann man pädagogisch entgegenwirken. Um der Überenge vorzubeugen, kann man die Schüler mit der letzten Stufe zu zeichnen beginnen lassen; aber das paßt nicht zum Wesen der Vielstufigkeit. Insbesondere wird dabei die Richtung der Baumgraphen von links nach rechts, die dem zeitlichen Verlauf der stochastischen Geschehnisse entspricht, umgekehrt. Und um die Endpunkte in eine Fluchtlinie zu bekommen, kann man die Schüler ein (durchsichtiges) Lineal anlegen lassen; aber dabei wird der zeitliche Ablauf eines mehrstufigen Experimentes zuungunsten der Gleichwertigkeit der möglichen Ergebnisse in einer Stufe visuell überbetont. Die beiden "; aber ..." werden in den anderen beiden Argumenten wieder aufgegriffen.

Zweites Argument: Die einzelnen Ausgänge eines Experimentes werden besonders in der ersten Stufe unsymmetrisch aufgemalt, sofern mehr als zwei Ausgänge vorkommen. Die als erste und die als letzte gemalten Ausgänge werden beim visuellen Nachgehen über lange Striche erreicht, die mittleren über kurze. Gleichwohl soll dies nichts veranschaulichen!

Während in diesem Argument die Vertauschbarkeit der einzelnen Ausgänge innerhalb einer Stufe angesprochen wurde, soll im nächsten die Vertauschbarkeit verschiedener Stufen behandelt werden.

Drittes Argument: Wenn ich damit beginne, eine Münze mehrfach zu werfen, oder wenn ich sie schon einige Male geworfen habe und sie noch mehrmals werfen werde, sind meine Situationen - statistisch gesehen - nicht anders. Der Würfel wisse ja nicht, was schon geschehen sei, sage ich meinen Schülern. Und eine "6" wird beim nächsten Wurf nicht deshalb wahrscheinlicher, weil sie schon so lange nicht gefallen ist. Diese statistische Selbstgleichheit eines später beginnenden Teiles eines vielstufigen Zufallsexperiments zu seinem Ganzen entspricht in der Baumdarstellung noch nicht einmal einer Ähnlichkeit; freilich wird man einen solchen Teil bei der exponentiell wachsenden Verästelung auf einer Zeichenebene nicht gleichgroß darstellen können.

Den Richtigzeichnen, der Symmetrie zwischen den Ausgängen eines Einzelexperiments und der Teil-Ganze-Ähnlichkeit können durch die folgenden beiden, fraktalen Darstellungen besser entsprochen werden.

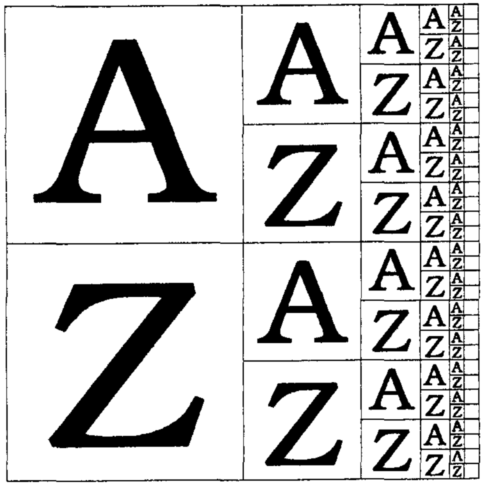

Abb. 1 **Erste Darstellungsweise:** Beim Münzwurf (Adler, Zahl):

Oder allgemein, bei m statt 2 möglichen Ausgängen, zerlegt man jedes Quadrat mit der Seitenlänge s in m links anliegende und übereinanderliegende Recht-ecke mit der Höhe $\frac{s}{m}$ und der Breite $\frac{m-1}{m} \cdot s$ und in m rechts anliegende und ebenfalls übereinanderliegende Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{s}{m}$. Die Rechtecke sollen die

möglichen Ausgänge eines Einzelexperimentes darstellen, und die zum großen Quadrat ähnlichen kleinen Quadrate enthalten diejenigen zu den noch folgenden Experimenten. Die dem zeitlichen Ablauf entsprechende Leserichtung ist wie beim Baumdiagramm von links nach rechts.

Mathematische und methodische **Kommentare**: (1) Für die Darstellung jeden Experimentes in den höheren Stufen steht wie am Anfang ein Quadrat zur Verfügung, also eine ähnliche Figur. Die entsprechend großen Beschriftungen betonen diese Ähnlichkeit. Damit ist der Kritik im "dritten Argument" entsprochen. (2) Daß die Quadrate schon nach wenigen Stufen sehr klein werden, muß hingenommen werden, wenn die Darstellung insgesamt auf einer Heftseite möglich sein soll. Denn die Anzahl der einzeln dargestellten Experimente wächst exponentiell mit der Stufenzahl - wie schon im "dritten Argument" - angemerkt. Bei der Baumdarstellung war dies ein wenig, aber nicht viel besser, weil dort bei derselben Höhe pro Einzelelement "viel" Platz in der Breite zur Verfügung stand; denn die Stufen waren nach rechts äquidistant aneinandergereiht. Freilich ist das Baumdiagramm für längere, praktische Rechenaufgaben besser geeignet; die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich dort übersichtlicher unterbringen. Es liegt näher bei der abstrakten algebraischen Darstellung; die fraktalen Diagramme veranschaulichen dafür besser die angesprochenen Aspekte in qualitativer Weise. (3) Unsere Darstellungsweise wirkt für eine globale Betrachtung übersichtlicher und deshalb macht sie die daran zu erlernende mathematische **Struktur** deutlicher. Denn wenngleich man weniger Stufen explizit zu zeichnen vermag und somit auch nicht mit ihnen rechnerisch umgehen kann, so springt doch die Regel, nach der das Ganze entsteht, schon bald ins Auge. Die Fortsetzung ad infinitum erscheint **selbstverständlich**; dies äußert sich auch darin, daß man die ersten, zeichenbaren Stufen schon **sofort** richtiger malt. Denn ein doldenartiger Graph läßt sich natürlicher malen, nämlich immer nur lokal orientiert, so wie auch beim Pflanzenwachsen eine Dolde entsteht. Freilich können Schüler bei **genügender** Unterrichtszeit (fast) alles erlernen, also auch jeden der beiden Graphenarten. (4) Während bei der Baumdarstellung Punkte übereinander liegen, sind es hier raumfüllende Quadrate; die Verbindungslinien zu den beiden benachbarten Stufen fehlen. Dadurch wird der visuelle Eindruck **symmetrischer**. Für jede Stufe kann man in unserer Darstellung die übereinanderliegenden Quadrate eher ver**gleich**en und eine figürliche Entsprechung sehen, etwa als Stapel von Würfeln; in der Baumdarstellung ist dies bei den übereinanderliegenden Punkten weniger visuell offensichtlich. (5) Eine naheliegende Abstraktion unserer verschieden großen Quadrate zu ebenso verschiedenen groß gemalten Punkten in den Quadratmitten führt zu einem Baumschema ohne Verbindungslinien und mit nach rechts kleiner gemalten Punkten. Entspricht diese Visualisierung besser der Vorstellung von einem mehrstufigen Experiment? Einerseits sind ja alle Ausgänge gleich bedeutend, und somit müßten alle Punkte gleichgroß gemalt sein. Andererseits stellt man sich aber nicht nur alle gleichen Experimente als Repräsentanten eines gemeinsamen Typs vor, sondern vornehmlich soll ihre zeitliche Abfolge bzw. das Geflecht aller Möglichkeiten dargestellt werden; und da nimmt man selbst jeweils einen gewissen Standpunkt ein, von dem aus gesehen die gleichsam entfernter liegenden, gleichen Dinge zwar ähnlich, aber doch kleiner sind. Dem entspricht, daß man auch bei dem Baumdiagramm einen der Punkte an den (exponierten!) Anfang stellt, und die übrigen liegen demgegenüber eher abseits (wenn man von weitem schaut). (6) Die Gleichheit von Ereignissen wird hier durch Ähnlichkeit veranschaulicht; die absolute Größe von Flächen ist dabei nicht quantitativ interpretationsfähig. Das sollte man sich hier bewußt machen, um der Gefahr eines negativen Transfers zu begegnen, der sich sonst bei Aufgaben zur geometrischen Wahrscheinlichkeit einstellen könnte. Auch bei Bernoulliketten mit $p \neq \frac{1}{2}$ entspricht die Darstellung mit gleichgroßen Quadraten nicht der Nichtgleichwahrscheinlichkeit. (7) Als ich in Klasse 6 die lexikographische Anordnung so modifizierte, daß ich die Buchstaben zwar gleich breit aber unserer Darstellung gemäß verschieden hoch malte, meldete sich mein Schüler Ümit und merkte aus eigener Intuition die Entsprechung zum Baumdiagramm an. (8) Das, was die Linien im Baumdiagramm mathematisch bedeuten, gehört freilich auch hier dazu. Es genügt aber, sie sich bei Gelegenheit bzw. bei Bedarf hinzuzudenken. Das wird einem nicht schwer fallen, sondern selbstverständlich sein; deshalb sind diese Linien als visuelle Leitlinien entbehrlich. Die Leseanweisung ist dann etwas anders: Wir laufen in Gedanken wie durch einen Irrgarten, durch die konkreten Ereignisse in den einzelnen Stufen geleitet. Vor einer Stufe stehen wir auf der Mitte des linken Randes des Quadrates und nach dem Festliegen des Ergebnisses des Zufallsexperimentes laufen wir in Gedanken zu dem entsprechenden Punkt des entsprechenden Quadrates der nächsten Stufe weiter rechts. Z. B. bei AZZAA:

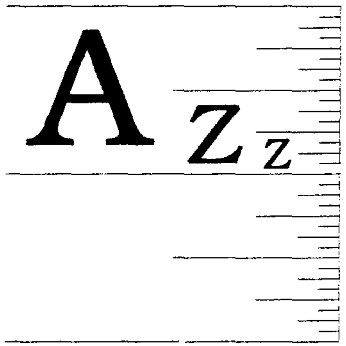

Abb. 2 Variante der ersten Darstellungsweise

(9) Wenn das zugrundeliegende Einzelexperiment mehr als 2 Ausgänge zuläßt, erlaubt diese Darstellungsweise praktisch höchstens noch drei oder nur noch zwei

Stufen. Aber was dabei anders ist, sieht man nach vorherigem ausführlichen Üben mit 2 Ausgängen dann auch ohne viele weitere Übung ein. (10) Bei gemischten Stufen, genauer: wenn bei verschiedenen Stufen verschieden viele Ausgänge möglich sein sollen, geht die Ähnlichkeit verloren und damit auch die ästhetisch ansprechende fraktale Struktur.

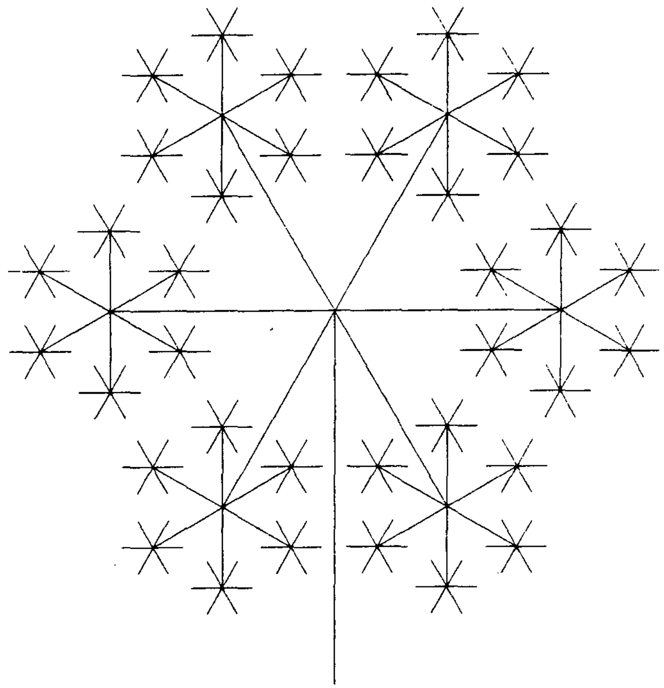

Abb. 3 **Zweite Darstellungsweise:** Bei Würfeln (Hexaeder)

Oder allgemein, bei m statt 6 möglichen Ausgängen: Der Endpunkt eines Strahles ist Mittelpunkt eines (großen) Kreises. Von diesem Mittelpunkt gehen m Strecken aus, deren andere Endpunkte Mittelpunkte von (kleinen) Kreisen sind; diese sind möglichst groß, wobei jeder die beiden benachbarten (kleinen) und auch den großen Kreis berühren; außerdem sollen zwei von ihnen den von außen kommenden Strahl berühren. Jeder der m kleinen Kreise wird "als großer" auf mathematisch ähnliche Weise mit "noch" kleineren Figuren gefüllt; etc. Die dem zeitlichen Ablauf entsprechende Leserichtung ist global gesehen geometrisch eher unregelmäßig, aber so, daß sich die stochastischen und die fraktalen Stufen entsprechen, und lokal gesehen verläuft sie bei jedem Kreis von innen nach außen.

Mathematische und methodische **Anmerkungen**: (1) Die entstehende Figur ist ein **Fraktal**; freilich müßte dafür der Strahl am Anfang zu einer Strecke "gestutzt" werden, so daß sich die Streckenlänge wie die entsprechenden Radien zueinander verhalten, und das "etc" müßte ad infinitum weitergeführt werden. Damit wird dem dritten Argument voll entsprochen. (2) Auch die Symmetrie ist gegen (zweites Argument). (3) Der von außen kommende Strahl bzw. die Endstrecke müssen nur wegen der Ähnlichkeit und der Regelmäßigkeit dabei hinzugenommen werden. (4) Für die Anwendungszwecke ist er entbehrlich. Auch die Kreisrandlinien braucht man nicht mehr hinzumalen, wenn man sich so an sie gewöhnt hat, daß man sie "sieht", auch wenn sie gar nicht dastehen. (5) Bei der Verwendung zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente kann man die Ausgänge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an oder auf die Strecken schreiben. (6) Die Platzausnutzung ist hier günstiger als beim Baum. Gleichwohl kann man meist nicht viele Stufen malen. Die relativ günstigste Platzausnutzung besteht bei m = 4 oder m = 5; denn pro Stufe ergeben sich folgende Verhältnisse zwischen den Größen aller kleinen Kreisflächen und der großen Kreisfläche:

m	=	2	3	4	5	6	7	8
G(m)	=	$\frac{1}{2}$	0,64617	0,68629	0,68521	$\frac{2}{3}$	0,63280	0,61280
		50%	64,6%	68,6%	68,5%	66,7%	63,3%	61,3%

(7) Wenn man - wie in (4) vorgeschlagen - nur die Strecken und deren Endpunkte hinschreibt, hat man wie beim Baum nur Punkte und Strecken dastehen, und zwar beides in gleicher Anzahl; nur in der Anordnung der Strecken und ihrer Länge unterscheiden sich die Darstellungen. (8) Die Leserichtung ist aber nun nicht von links nach rechts (wie beim Lesen in einem Buch), sondern stufenweise verschieden. Dafür lassen sich mehrere alltagsanschauliche Vergleiche aufzeigen: Eine (=jede) Stufe weit entspricht dies den Wellen, wenn man einen Stein ins Wasser wirft. Zwei Stufen weit kann man es mit der entsprechenden Feuerwerksfigur vergleichen, bei der nach der ersten Funkenkugel auf deren Oberfläche wieder kleine Kugeln zünden. Oder man kann es in phantastischer Weise mit einem Schiff vergleichen, das mehrere kleine Schiffe aussetzt, die nach allen Richtungen gleich schnell wegfahren, bis zur gleichen Zeit jedes wieder kleinere Schiffe aussetzt, die ... etc. (9) Dieses Figurenkonzept entspricht dem "natürlichen" Schülerzeichnen - wie im ersten Argument - angesprochen. (10) Beiläufig erwerben die Schüler auch noch ein visuelles Gefühl für regelmäßige ebene Vielecke.

Ein abschließender **Vergleich**: Diese Fraktal-Diagramme sind eher bei einzelnen einfacheren Aufgaben einzusetzen, um grundsätzliche Aspekte hervorzuheben; bei komplexeren Aufgaben werden sie bald unübersichtlich. Die Baumdiagramme aber entsprechen mehr den algebraischen Rechnungen und lassen sich diesen anpassen. Das bedeutet nicht unbedingt, daß diese Fraktal-Darstellungen ausschließlich in unteren Klassenstufen behandelt werden sollten. Denn immer mehr verbreitet sich auch unter SII-Schülern Unkenntnis in elementaren Einsichten. Da man wegen zu erwartender Software aber das notfalls stumpfsinnige Einüben algorithmischer Verfahren zugunsten von grundsätzlichem Verstehen ein wenig einschränken kann, sind von solchen Fertigkeiten unabhängige methodische Hilfen für das Gesamtanliegen des Unterrichts nützlich.

Ob man im Unterricht die Baum- oder eine fraktale oder alle Darstellungen behandelt, wird jeder Lehrer selbst im Hinblick auf die Leistungslage in der jeweiligen Klasse und auf seinen Intentionenkontext in dem jeweiligen Unterricht entscheiden. Z. B. steht dabei die Schönheit der Fraktale der Einschränkung gegenüber, daß man gemischte Folgen von Einzelexperimenten ausschließen muß, also nur dasselbe Experiment mehrmals nacheinander ausführen kann. Wenn man aber auf die Fraktal-Eigenschaft verzichtet, läßt sich diese Darstellungsart auch auf gemischte Folgen übertragen und kann auch dann ästhetisch reizvolle Figuren liefern.

Die Vorschläge in diesem Aufsatz können den Blick für Alternativen weiten. Einerseits stellt eine solche Vielfalt bessere Mathematik dar, weil dann der Eindruck vermieden wird, daß eine gewisse Vorgehensweise die einzig mathematische sei; leider besitzen viele Schüler eine solche Ehrfurcht vor ihrem Mathematikbuch und ihrem -lehrer. Andererseits verfügt der Lehrer damit über eine Palette methodischer Hilfen bei Schülerschwierigkeiten und er wird auch generell sensibler und bereiter, solche Schwierigkeiten wahrzunehmen.

OStR Dr. Hans G. Schönwald, Ostlandstr. 19, 5900 Siegen-Eisern