KENDALL'S τ
- Ein alternativer Korrelationskoeffizient -

von Claudia SCHÜTZE, Dortmund

Zusammenfassung: Der im Rahmen der Korrelations- und Regressionsrechnung verwendete Korrelationskoeffizient gilt als schwierig zu berechnen und interpretieren. Darüberhinaus macht er nur Sinn bei metrisch skalierten Meßreihen. In dieser Arbeit wird ein alternativer Korrelationskoeffizient vorgestellt, der sich mit graphischen Methoden berechnen, somit wesentlich einfacher interpretieren läßt und auch für Daten aus einer Ordinalskala sinnvoll ist.

1 Einleitung

In verschiedenen Arbeiten in der Zeitschrift *Stochastik in der Schule* (vgl. BOROVCNIK (1988), GOODE & GOLD (1988) und WIRTH (1991)) wird die Korrelationsrechnung so dargestellt, daß sie auch in der Sekundarstufe II unterrichtet werden kann. Dabei wird der gebräuchlichste Korrelationskoeffizient, den man auch als BRAVAIS-PEARSONSCHEN- oder auch Produkt-Momenten-Korrelationskoeffizienten bezeichnet, auf möglichst einfache Weise eingeführt. Auch wenn auf einige mathematische Voraussetzungen verzichtet wird, ist dieser Koeffizient durch seine aufwendige Berechnung und schwierige Interpretierbarkeit weiterhin schwer vermittelbar. Außerdem gibt es Fälle, in denen seine Berechnung wenig Sinn macht. Wenn die Werte nicht aus einer metrischen Meßskala stammen, sind die Abstände zwischen den Beobachtungen nicht mehr interpretierbar. Als Beispiel wären hier Schulnoten oder Schuhgrößen zu nennen. Die Werte sind zwar bezüglich ihrer Größen noch vergleichbar, das heißt die Note 1 ("sehr gut") ist besser als 2 ("gut"), aber der Abstand zwischen 1 und 2 hat keine Bedeutung mehr. Für solche Werte existiert ein einfacher Ausweg, der hier vorgestellt wird. Dazu werden die beobachteten Originalwerte zunächst transformiert, das heißt genauer, daß ihnen Ränge

zugeordnet werden. Für diese Ränge wird dann die Korrelation berechnet.

2 Ränge

Angenommen man hat n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorliegen, die alle verschieden sind. Der Fall, daß zwei oder mehrere Beobachtungen gleich sind, ist schwieriger zu behandeln und wird hier ausgeschlossen. Der Rang einer Beobachtung gibt nun an, an welcher Stelle die Beobachtung steht, wenn man die Werte der Größe nach ordnen würde. Das heißt, der kleinste Wert erhält die Rang 1, der zweitkleinste den Rang 2 und der größte den Rang n.

Beispiel 1:

Sechs Körpergrößen werden die Ränge wie folgt zugeordnet:

Person	A	B	C	D	E	F
Größe	1,76 m	1,72 m	1,86 m	1,80 m	1,75 m	1,68 m
Rang	4	2	6	5	3	1

Die übliche verbale Definition eines Ranges lautet:

Der Rang einer Beobachtung gibt die Anzahl der Beobachtungen an, die größer oder gleich der Beobachtung sind.

Dabei wird die Beobachtung selbst mitgezählt. Das heißt beispielsweise, daß es einen Wert gibt, der kleiner oder gleich dem kleinsten ist - nämlich er selbst, und so erhält der kleinste Wert den Rang 1.

Es erscheint zunächst vielleicht nicht sehr sinnvoll, die Werte so zu transformieren, da dabei sehr viel Information verloren geht. Es gibt jedoch auch Fälle, in denen nur Ränge vergeben werden können. Angenommen, die Schüler einer Klasse sollten nach ihren mathematischen Fähigkeiten beurteilt werden. Will man sich nicht mit dem groben Notensystem von 1 bis 6 zufrieden geben, kann man jeden Schüler mit den anderen vergleichen. Man wird dabei feststellen können, welcher der beste, welcher der zweitbeste Schüler usw. ist, aber man wird diese Fähigkeiten nur schwer absolut messen können.

Auf der Basis von Rängen lassen sich nun Korrelationskoeffizienten definieren, die man als Rangkorrelationskoeffizienten bezeichnet und zu denen auch der Koeffizient gehört, der hier vorgestellt wird.

3 Korrelationskoeffizienten

Neben dem üblichen Korrelationskoeffizienten gibt es eine Reihe von weiteren Koeffizienten, die alle etwas gemeinsam haben. Sie sollen den Zusammenhang zwischen zwei Größen (Merkmalen) beschreiben. Um die Werte der Koeffizienten interpretieren zu können, sollen sie zwischen 1 und -1 liegen, wobei 1 bedeutet, daß zwischen den Merkmalen ein starker positiver Zusammenhang besteht und -1 bedeutet, daß ein starker negativer Zusammenhang besteht. "Positiv" heißt, daß mit großen bzw. kleinen Werten des einen Merkmals große bzw. kleine Werte des anderen Merkmals einhergehen, "negativ" bedeutet, daß zu großen Werten des einen Merkmals kleine Werte des anderen gehören und umgekehrt. Es sei daraufhingewiesen, daß ein Korrelationskoeffizient keine Aussage über den kausalen Zusammenhang macht (vgl. BOROVCNIK, 1988).

4 KENDALL's τ

Nachfolgend werden Beobachtungsreihen betrachtet, die sich aus Vergleichsbeurteilungen und Zuordnung von Rängen ergeben.

Beispiel 2:

Sechs Schüler einer Klasse werden hinsichtlich ihrer Leistungen in Musik und Mathematik miteinander verglichen. Der beste Schüler erhält den Rang 1, der zweitbeste den Rang 2 usw. Die daraus resultierenden Ränge entsprechen also nicht den Noten 1 bis 6.

Schüler	A	B	C	D	E	F
Musik	4	2	6	5	3	1
Mathematik	2	4	5	6	3	1

Man kann für die Ränge den BRAVAIS-PEARSONschen Korrelationskoeffizienten berechnen. Dieser Koeffizient heißt SPEARMAN's ρ. Aufgrund der Ähnlichkeit ist er sehr beliebt, läßt sich gerade deswegen aber auch genauso schwer anschaulich erklären.

Der alternative Korrelationskoeffizient, der nun vorgestellt wird, ist dem Koeffizienten SPEARMAN's ρ zwar von seinen statistischen Eigenschaften her sehr ähnlich, er wird aber auf eine ganz andere einfache Weise berechnet.

Der Koeffizient wurde aufgrund einer Arbeit von M. G. KENDALL (1938), der ihn als erster als Korrelationskoeffizient erkannte, KENDALL's τ genannt. In einer früheren Arbeit (HOLMES, 1928) wird er als "Koeffizient von Unordnung" vorgestellt. Erst später (GRIFFIN, 1958) wird gezeigt, daß der Unordnungskoeffizient und KENDALL's τ identisch sind.

Die sogenannte Unordnung zwischen den Rängen der Merkmalswerte läßt sich graphisch darstellen. Wenn man die Ränge wie in Beispiel 2 untereinander schreibt und jeweils gleiche Ränge durch eine Linie miteinander verbindet (vgl. Beispiele 3 bis 5), kann man anhand der Schnittpunkte zwischen der einzelnen Linien den Grad der Unordnung erkennen.

Beispiel 3:

Falls alle Beobachtungen für beide Merkmale die gleichen Ränge besitzen, gibt es zwischen den Verbindungslinien keine Schnittpunkte. Dann würde man auch von einer strengen Ordnung sprechen.

Merkmal A	1	2	3	4	5	6
Merkmal B	1	2	3	4	5	6

Beispiel 4:

Vertauscht man nun in Beispiel 3 für das Merkmal B die Ränge 1 und 2 erhält man einen Schnittpunkt. Die Unordnung wächst also mit jeder Vertauschung:

Merkmal A	1	2	3	4	5	6
Merkmal B	1	2	3	4	5	6

Bemerkung 1:

Mit jeder Vertauschung zweier benachbarter Ränge bei Merkmal B, die die Unordnung größer macht, erhält man einen Schnittpunkt der Verbindungslinien dazu. Oder andersherum ausgedrückt: Ausgehend von einer beliebigen Anordnung der Ränge verringert jede Vertauschung von benachbarten Rängen eines Merkmals, die die Unordnung kleiner macht, die Anzahl der Schnittpunkte um Eins, d. h. die Anzahl der Schnittpunkte ist gleich der Anzahl der Vertauschungen, die nötig sind, um die Ränge zweier Merkmale in die gleiche Reihenfolge (oder in die gleiche Ordnung) zu bringen. Je größer also diese Anzahl ist, umso

größer ist auch die Unordnung. Daher läßt sich die Anzahl der Schnittpunkte als Maß für die Unordnung auffassen.

Beispiel 5:

Die größte Unordnung ist gegeben, wenn die Ränge in der folgenden Form vorliegen:

Merkmal A	1	2	3	4	5	6
Merkmal B	6	5	4	3	2	1

In diesem Beispiel ist es sehr schwer, Verbindungslinien sauber einzuzeichnen, da darauf zu achten ist, daß die Schnittpunkte nicht übereinanderliegen. Deswegen wird hier darauf verzichtet. Die Gesamtzahl der Schnittpunkte beträgt fünfzehn, wie man aus folgender Überlegung sieht:

Die Verbindungslinie zwischen den Rängen 1 schneidet die Linien zwischen den übrigen Rängen jeweils einmal (5 Schnittpunkte), die Linie zwischen den Rängen 2 schneidet zusätzlich die Linien der Ränge 3 bis 5 (4 Schnittpunkte) usw., bis schließlich die Linie zwischen den Rängen 5 diejenige zwischen den Rängen 6 einmal schneidet. Daraus erhält man die Anzahl der Schnittpunkte.

Anhand der Beispiele erkennt man, daß bei einer großen Korrelation die Unordnung klein ist und mit sinkender Korrelation die Unordnung wächst. Als Maß für die Unordnung wird nun die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den Verbindungslinien gewählt. In Beispiel 3 gibt es keinen Schnittpunkt, in Beispiel 4 einen und schließlich in Beispiel 5 fünfzehn. Durch eine geeignete Transformation erhält man aus der Anzahl der Schnittpunkte, die mit X bezeichnet sei, den Korrelationskoeffizienten KENDALL's τ, der sich berechnen läßt aus:

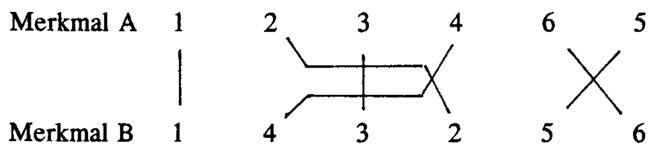
$$\tau = 1 - \frac{4X}{n(n-1)} \qquad (1)$$

Dabei gibt n die Anzahl der Individuen, bzw. den größten Rang an.

Bemerkung 2:

Es ist bei der Bestimmung der Schnittpunkte darauf zu achten, daß sich die Ränge eines Merkmals in aufsteigender Reihenfolge befinden. Gegebenenfalls müssen die Ränge entsprechend umgeordnet werden. Andernfalls kann man eine andere Zahl an Schnittpunkten und so ein falsches Ergebnis erhalten. Weiterhin ist darauf zu achten, daß in der Zeichnung nicht zwei oder sogar mehr Schnittpunkte übereinander liegen. Auch dies würde eine falsche Zahl an Schnittpunkten ergeben.

Für das Beispiel 2 erhält man 4 Schnittpunkte:



und mit $n = 6$:

$$\tau = 1 - \frac{4 \cdot 4}{6 \cdot 5} = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} = 0.4667$$

Es läßt sich relativ leicht zeigen, daß dieser Koeffizient die in Abschnitt 3 beschriebenen Eigenschaften besitzt. Falls nämlich die Ränge für beide Merkmale vollständig übereinstimmen (Beispiel 3), gibt es keinen Schnittpunkt, und es ist $\tau = 1$. Falls die Ränge genau gegensätzlich vergeben wurden (Beispiel 5), dann gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte, und es gilt $\tau = -1$. Diese Anzahl erhält man, indem man die Anzahl der Schnittpunkte nacheinander für jede eingezeichnete Verbindungslinie bestimmt. Die zweite Linie schneidet die erste,

die dritte die zweite und die erste usw., bis die letzte die $n - 1$ vorher eingezeichneten Linien schneidet.

Die Berechnung von KENDALL's τ auf diese Weise entspricht nicht der üblichen Definition. Diese beruht auf paarweisen Vergleichen der Rangpaare, die zu jeder Person gehören. Zur Erläuterung betrachte man noch einmal Beispiel 2:

Schüler	A	B	C	D	E	F
Musik	4	2	6	5	3	1
Mathematik	2	4	5	6	3	1

Nun werden die Ränge in Musik und Mathematik für jedes Paar von Schülern verglichen. Jedem Paar wird dabei ein Wert, den man als Score bezeichnet, zugeordnet. Und zwar erhält ein Paar den Score 1, falls in beiden Fällen (bzgl. Musik und Mathematik) die gleiche Ordnung besitzen. Damit ist gemeint, daß in beiden Fällen der Rang des einen Schülers größer bzw. kleiner sein soll, als der Rang des anderen Schülers. Als Beispiel betrachte man das Paar A, C. Schüler A besitzt sowohl in Musik als auch in Mathematik einen kleineren Rang als Schüler C und erhält damit den Score 1. Solche Paare bezeichnet man als konkordante Paare. Für den Fall, daß die Ränge jeweils eine andere Ordnung besitzen, das heißt, daß ein Rang eines Schülers für ein Merkmal größer und für das andere kleiner als der Rang des anderen Schülers ist, erhält das Paar den Score -1. Dann heißt das Paar auch diskordant. Dies ist beispielsweise bei dem Paar AB der Fall. Hier ist der Rang in Musik von A größer als der von B, aber der Rang in Mathematik kleiner. Insgesamt erhält man für Beispiel 2 folgende Scores:

A B	-1	B C	1	C E	1
A C	1	B D	1	C F	1
A D	1	B E	-1	D E	1
A E	-1	B F	1	D F	1
A F	1	C D	-1	E F	1

Die Korrelation ist hoch, wenn es viele konkordante Paare gibt, und sie wird klein sein, wenn es viele diskordante Paare gibt. Die Summe der Scores gibt daher einen Aufschluß über die Korrelation. Auch hier wird die Summe, die mit S bezeichnet sei, noch normiert, damit der daraus resultierende Korrelationskoeffizient die in Abschnitt 3 beschriebenen Eigenschaften besitzt. Der Koeffizient KENDALL's τ ist dann definiert durch:

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)} \tag{2}$$

In Beispiel 2 ist $S = 7$ und damit wieder $\tau = 0.4667$. Die Summe der Scores läßt sich auch als Differenz der Anzahl der konkordanten und der diskordanten Paare interpretieren, da jeder Score 1 für ein konkordantes und jeder Score -1 für ein diskordantes Paar steht. Bezeichnet P die Anzahl der konkordanten und Q die Anzahl der diskordanten Paare, so ist $S = P - Q$ und

$$\tau = \frac{2(P-Q)}{n(n-1)} \tag{3}$$

Nun beträgt die Gesamtzahl der paarweisen Vergleiche $\frac{n(n-1)}{2}$, die man mit ähnlichen Überlegungen wie bei der Bestimmung der maximalen Anzahl an Schnittpunkten erhält. Die Summe an konkordanten und diskordanten Paaren ist gerade gleich der Gesamtzahl, so daß mit Hilfe von

$$S = P - Q \quad \text{und} \quad P + Q = \frac{n(n-1)}{2}$$

die Summe S und KENDALL's τ folgende Darstellung besitzen:

$$S = \frac{n(n-1)}{2} - 2Q \tag{4}$$

$$\tau = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} \tag{5}$$

Diese Schreibweise von τ ist der Darstellung (1) sehr ähnlich. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Anzahl der Schnittpunkte gleich der Anzahl der diskordanten Paare ist. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen:

Nach Bemerkung 1 ist die Anzahl der Schnittpunkte gleich der Anzahl der Vertauschungen benachbarter Ränge, die die Unordnung kleiner macht. Durch eine solche Vertauschung wird ein diskordantes Paar in ein konkordantes umgewandelt. Also ist die Anzahl der diskordanten Paare gleich der Anzahl dieser Vertauschungen und somit gleich der Anzahl der Schnittpunkte. Damit wurde die Verbindung zu der graphischen Berechnungsmethode hergestellt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß es sich dabei nicht um eine rein graphische Methode handelt, da man den Wert des Rangkorrelationskoeffizienten nicht direkt aus der Zeichnung ablesen kann. In die Bestimmung des Koeffizienten geht die maximale Anzahl von Schnittpunkten mit ein, die aus der Zahl der Ränge gesondert berechnet werden muß. Vielmehr handelt es sich um eine vereinfachte Methode, die auf die recht mühselige Bestimmung der konkordanten bzw. diskordanten Paare verzichtet.

5 Abschließende Bemerkung

Der Rangkorrelationskoeffizient KENDALL's τ ist einfach zu berechnen und intuitiv zu verstehen, und es lassen sich mit ihm Korrelationen für ordinalskalierte Meßreihen bestimmen.

Auch wenn der Koeffizient aus dem Rahmen der in der Schule üblicherweise unterrichteten Statistik herausfällt, bietet er sich dennoch an, einen ersten anschaulichen Einblick in die Korrelationsrechnung zu geben und den Schülern den Einstieg zu erleichtern. Dabei kann sogar auf den statistischen Hintergrund fast völlig verzichtet werden.

Die in Abschnitt 4 erwähnte Ähnlichkeit zu dem Koeffizienten SPEARMAN's ρ, der sich aus der Berechnung des Produkt-Momenten-Koeffizienten ergibt, bezieht sich auch die asymptotische Äquivalenz. Diese bedeutet, daß die Koeffizienten bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungspaaren den gleichen Wert annehmen. Dies sei jedoch nur der Vollständigkeit halber angeführt. Näheres hierzu und weitere sehr anschauliche Ausführungen zur Rangkorrelationsrechnung findet man bei KENDALL & GIBBONS (1990).

Literatur

BOROVCNIK, M. (1988): Korrelation und Regression - Ein inhaltlicher Zugang zu den grundlegenden mathematischen Konzepten .- Stochastik in der Schule 1/1988, S. 5 - 22

GOODE, S. M. & E. J. GOLD (1988): Lineare Regression und Korrelation - Ein elementarer Zugang .- Stochastik in der Schule 1/1988, S. 33 - 35

GRIFFIN, H. D. (1958): Graphic computation of tau as measure of disarray .- Journal of the American Statistical Association 53, S. 441 - 447

HOLMES, S. D. (1928): A graphical method of estimating R for small groups .- Educational Psychology, Appendix B, Sandiford (ed.), Longmans, Green & C., New York, 391 -394

KENDALL, M. G. & J. D. GIBBONS (1990): Rank correlation methods .- Edward Arnold, London

WIRTH, H. (1991): Beziehungshaltige Mathematik in Regression und Korrelation .- Stochastik in der Schule 1/1991, S. 34 - 53

Dipl.-Stat. Claudia SCHÜTZE
Universität Dortmund, Fachbereich Statistik
Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund