

Noch einmal: Computer-erzeugtes Denken¹

Gerd Riehl, Ganztagsgymnasium, 30890 Barsinghausen

Zusammenfassung: Die graphische Veranschaulichung eines von Peter Holmes (1991) beschriebenen Zufallsprozesses mit Hilfe von Markow-Ketten erlaubt es, auf einfache Weise Rekursionsformeln für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Zufallsgröße zu gewinnen. Mit einem auf diesen Formeln basierenden effektiven Algorithmus lassen sich die von Holmes beschriebenen Speicherplatz-Probleme bei der Berechnung der Verteilung vermeiden. Auch zum Beweis von Vermutungen über gewisse in dieser Verteilung auftretende Einzelwahrscheinlichkeiten erweisen sich Markow-Ketten als hilfreich.

ZDM-Klassifikation: K60

Einleitung

Stochastik in der Schule brachte vor einiger Zeit die Übersetzung eines Artikels von Peter Holmes mit dem Titel "Computer-erzeugtes Denken". Er untersuchte die Anzahl R der Runs von Kopf und Zahl in einer Serie von n Münzwürfen (Run = Block gleicher Ergebnisse, z.B. ist in der Serie KKK WW K WWWW $n = 10$ und $R = 4$). Die Computersimulation dieses Experiments führte Holmes auf eine überraschende Entdeckung: Bei unsymmetrischen Münzen sind ungerade Werte von R häufiger als gerade; der Effekt wurde umso größer, je weiter die Wahrscheinlichkeit $p = P(K)$ für Kopf von 0,5 abwich.

Um dieses empirisch gewonnene Ergebnis theoretisch abzusichern, ließ Holmes die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße R mit Hilfe eines Programms berechnen, das allerdings schon bei der Serienlänge $n = 20$ zu Speicherplatz-Problemen führte. Diese Beschränkung und Holmes' Bemerkung zu seiner Methode, sie würde für große n "sehr aufwendig werden ohne Einsicht", veranlaßten mich, nach einem effektiveren Algorithmus zu suchen, der möglichst den beobachteten Effekt auch einsichtig machen sollte.

Die angemessene Lösung des Problems liegt in der Verwendung einer Markow-Kette. Die graphische Darstellung des Zufallsprozesses hilft einerseits beim Verständnis des unerwarteten Befundes in der Häufigkeitsverteilung von R . Darüberhinaus führt uns der Graph aber auch zu relativ einfachen Rekursionsformeln für die theoretische Verteilung, die leicht in ein Rechenblatt oder ein Programm umzusetzen sind, das dann für beliebige n und p die Verteilung berechnet (und dabei nur ein Minimum an Speicherplatz erfordert).

¹ Zuerst erschienen (in Englisch) in Teaching Statistics Volume 16, Number1, S.9-11

Die Tabellen der so berechneten Wahrscheinlichkeiten offenbarten ein neues überraschendes Ergebnis, das mich nun ebenfalls zu Computer-erzeugtem Denken führte. Auch an diesem Beispiel läßt sich im Sinne des erwähnten Artikels zeigen,

- daß der Gebrauch eines Computers zur *Vermutung* neuer mathematischer Sachverhalte führen kann,
- daß man aber deren Beweis nur durch *Denken* finden kann.

Mit meinen Ausführungen möchte ich aber auch dafür plädieren, für gewisse stochastische Probleme (wie das hier vorliegende, besonders aber für solche mit einer unendlichen Ergebnismenge) Markow-Ketten im Unterricht einzusetzen.

Eine neue Beschreibung des Problems

Abb. 1 zeigt die Markow-Kette für eine Serie von Münzwürfen. Die verschiedenen Zustände sind mit der Anzahl r der Runs bezeichnet, die möglichen *Übergänge* (von r nach r bzw. nach $r+1$) bei Erhöhung der Wurfzahl von n auf $n+1$ sind durch Pfeile gekennzeichnet, die mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit für diesen Übergang belegt sind ($p = P(K)$ bzw. $q = P(Z) = 1-p$).

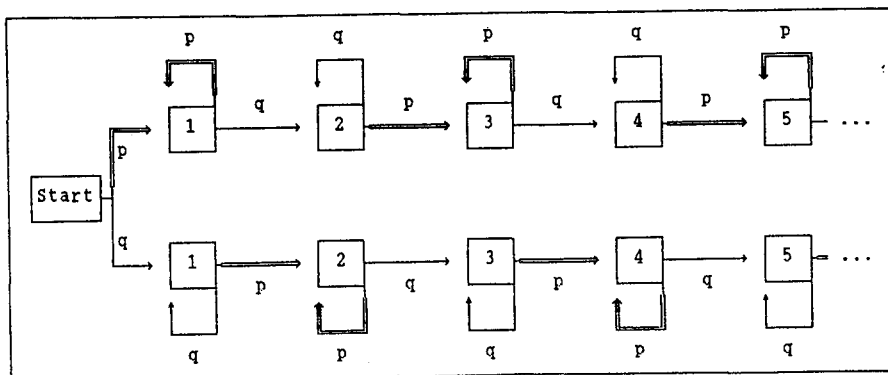


Abb.1 Markow-Kette (wiederholtes Werfen einer Münze)

Jeder Zustand erscheint im Graphen zweimal, in Abhängigkeit davon, ob der erste Wurf Kopf oder Zahl war. Sinnvollerweise betrachtet man daher die *bedingten* Wahrscheinlichkeiten $P_K(n,r)$ und $P_Z(n,r)$ für r Runs in n Würfeln, falls der erste Wurf K bzw. Z war.

Wenn $p > q$ ist, kommt man in Abb.1 offenbar leichter in die obere Reihe, und es ist wahrscheinlicher, in einem Zustand mit ungerader Anzahl r von Runs zu bleiben als ihn zu verlassen; umgekehrt ist es wahrscheinlicher, einen Zustand mit geradem n zu verlassen als dort zu verbleiben. In Abb. 2a) sind die Wahrscheinlichkeiten

$p \cdot P_K(n,r)$ für $p=0,8$ und $n=5$ dargestellt.

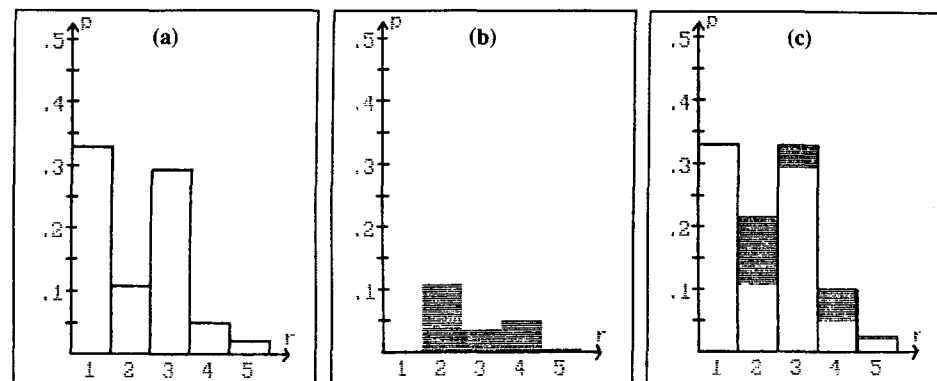


Abb.2 Verteilungen für $n=5$ und $p=0,8$
 a) $p \cdot P_K(n,r)$ b) $q \cdot P_Z(n,r)$ c) $P(n,r)$

In der unteren Reihe der Markow-Kette sind die Rollen von gerade und ungerade vertauscht [Abb.2b) zeigt die Wahrscheinlichkeiten $q \cdot P_Z(5,r)$]. Da es aber weniger wahrscheinlich ist, in diese Reihe zu gelangen, können die Gipfel und die Senken von Abb. 2a) über die (weniger ausgeprägten) entsprechenden Senken und Gipfel des Graphen von 2b) dominieren, wie es die Superposition der beiden Graphen in Abb.2c) zeigt.

Rekursionsformeln für die Verteilung von R

Man kann aus der oberen Reihe der Markow-Kette in Abb.1 nun leicht eine Rekursionsformel für $P_K(n,r)$ ablesen; die Formel für $P_Z(n,r)$ in der unteren Reihe erhält man aus $P_K(n,r)$ durch Vertauschen von p und q . Es genügt daher, die obere Reihe zu betrachten. Offenbar gilt: $P_K(1,1)=1$ und für alle n : $P_K(n,0)=0$.

Ist $n > 1$, so greifen wir auf die Ergebnisse für $n-1$ zurück. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1) r ungerade (d.h. der letzte Wurf war Kopf) und
- 2) r gerade (letzter Wurf Zahl).

Im Fall (1) gab es in den ersten $n-1$ Würfeln entweder r oder $r-1$ Runs, auf jeden Fall aber Kopf im n -ten Wurf. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für r Runs in n Würfeln (unter der Bedingung "Kopf im 1. Wurf"):

$$P_K(n,r) = p \cdot [P_K(n-1,r-1) + P_K(n-1,r)] \quad (r \text{ ungerade}),$$

worin offensichtlich $P_K(n-1,n)=0$ gilt.

Im Fall (2) ist in dieser Formel p durch q zu ersetzen, weil dann der n -te Wurf Zahl war:

$$P_K(n,r) = q \cdot [P_K(n-1,r-1) + P_K(n-1,r)] \quad (r \text{ gerade}).$$

Die analogen Formeln für die Zustände der unteren Reihe sind:

$$P_Z(n,r) = q \cdot [P_Z(n-1,r-1) + P_Z(n-1,r)] \quad (r \text{ ungerade}) \text{ und}$$

$$P_Z(n,r) = p \cdot [P_Z(n-1,r-1) + P_Z(n-1,r)] \quad (r \text{ gerade}).$$

Die totale Wahrscheinlichkeit für r Runs in n Würfeln erhält man aus diesen bedingten Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen:

$$P(n,r) = p \cdot P_K(n,r) + q \cdot P_Z(n,r).$$

Das folgende aus Holmes' Artikel entnommene Beispiel für $n=3$ und $p=0,8$ illustriert die Verwendung der Rekursionsformeln: Rückgriff auf die Werte $P_K(2,r)$ und $P_Z(2,r)$ für $n=2$, Fallunterscheidungen zwischen "1. Wurf Kopf" und "1. Wurf Zahl" einerseits bzw. zwischen "r ungerade" und "r gerade" andererseits. (Die in den Graphen der Abb.2 dargestellten Wahrscheinlichkeiten erhält man nach zwei weiteren Rekursionsschritten.)

Innerhalb eines Computerprogramms ist es zweckmäßig, in jeder Spalte die Berechnungen mit $n=r$ zu beginnen, z. B. (vgl. Tab.1!)

$$P_K(3,3) = p \cdot [P_K(2,2) + P_K(2,3)] = 0,8 \cdot [0,20 + 0] = 0,16,$$

und dann bis hinunter zu $r=1$ ebenso fortzufahren, im Beispiel:

$$P_K(3,2) = q \cdot [P_K(2,1) + P_K(2,2)] = 0,2 \cdot [0,8 + 0,2] = 0,20,$$

$$P_K(3,1) = p \cdot [P_K(2,0) + P_K(2,1)] = 0,8 \cdot [0 + 0,8] = 0,64.$$

Bei diesem Vorgehen reicht je ein Array der Länge $n+1$ an Speicherplatz für die Werte von P_K bzw. P_Z . Tab.2 zeigt die Hardcopy einer Verteilung, die abschnittsweise auf den Bildschirm ausgegeben wird (Die Rechenzeit für $n=100$ beträgt weniger als eine Sekunde!):

a) $n=2, p=0.8$

r	$P_K(2,r)$	$P_Z(2,r)$
3	0	0
2	0.20	0.80
1	0.80	0.20
0	0	0

b) $n=3, p=0.8$

r	$P_K(3,r)$	$P_Z(3,r)$	$p \cdot P_K + q \cdot P_Z = P(3,r)$
3	0.16	0.16	$0.128 + 0.032 = 0.160$
2	0.20	0.80	$0.160 + 0.160 = 0.320$
1	0.64	0.04	$0.512 + 0.008 = 0.520$
0	0	0	0

Tab.1 Anwendung der Rekursionsformeln

Verteilung von $R =$ "Anzahl Runs in einer Bernoulli-Kette der Länge n "

Wahrscheinlichkeit für "Kopf" in einem Einzelwurf: $p = 0.8$
Länge der Bernoulli-Kette : $n = 100$

r	$p \cdot P_K(r)$	$q \cdot P_Z(r)$	$P(r)$
31	0.08645	0.00509	0.09154
32	0.02202	0.02202	0.04405
33	0.08802	0.00559	0.09360
34	0.02189	0.02189	0.04378
35	0.07957	0.00542	0.08499
36	0.01930	0.01930	0.03860
37	0.06397	0.00466	0.06863
38	0.01512	0.01512	0.03023
39	0.04578	0.00355	0.04933
40	0.01053	0.01053	0.02105
41	0.02917	0.00240	0.03158
42	0.00652	0.00652	0.01304
43	0.01656	0.00145	0.01801
44	0.00359	0.00359	0.00718
45	0.00837	0.00077	0.00914

Return drücken !

Tab. 2 Verteilung von R für $n=100$ und $p=0,8$ (Ausschnitt, berechnet mit dem Programm RUN-ZAHL.PAS)

Eine neue überraschende Entdeckung

Tabelle 2 zeigt - natürlich - wieder den *Holmes-Effekt*, daß bei unsymmetrischen Münzen ungerade Anzahlen von Runs wahrscheinlicher sind als gerade. Aber die Zahlen führen uns noch auf eine neue Vermutung: Es scheint, als ob die Wahrscheinlichkeiten für gerade Run-Zahlen unabhängig sind vom Ausfall des ersten Wurfs:

$$p \cdot P_K(n,r) = q \cdot P_Z(n,r), \text{ falls } r \text{ gerade.}$$

Der Beweis knüpft an eine Idee von Peter Holmes an: Wenn r gerade ist, dann war der letzte Wurf Zahl, falls der erste Kopf war, und umgekehrt war der letzte Wurf Kopf, falls der erste Zahl war. Folglich gibt es zu jeder Serie in der unteren Reihe von Abb.1 eine symmetrische in der oberen. So finden wir z.B. zu der Serie KZZKZ aus der oberen Reihe die zu ihr symmetrische ZKZZK in der unteren. Die Anzahl der Runs (im Beispiel 4) und die Wahrscheinlichkeiten ($p^2 \cdot q^3$) sind in beiden Serien identisch. Daher ist auch die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Serien mit demselben r in beiden Reihen der Abb.1 die gleiche.

Ein Beweis mit einer Markov-Kette

Zum Abschluß möchte ich an einem Beispiel zeigen, wie nützlich die Beschreibung von Zufallsprozessen mit Markov-Ketten sein kann: In seinem Artikel bewies Holmes, daß für alle $n \geq 2$ gilt:

$$P(r \text{ ungerade}) = 1 - 2p + 2p^2.$$

(Hieraus folgert er: $P(r \text{ ungerade}) - P(r \text{ gerade}) = (1 - 2p)^2 \geq 0$, wobei nur im Falle $p=0,5$ das Gleichheitszeichen gilt.)

Für den neuen Beweis betrachten wir eine vereinfachte Markov-Kette (vgl. Abb. 3, ihre Zustände sind: $U_K = r$ ungerade, K im 1. Wurf; $U_Z = r$ ungerade, Z im 1. Wurf; G_K, G_Z analog für gerade r).

Wir lesen aus der oberen Reihe ab (für $n \geq 2$):

$$P_K(n, U_K) = p \cdot P_K(n-1, U_K) + p \cdot P_K(n-1, G_K) = p.$$

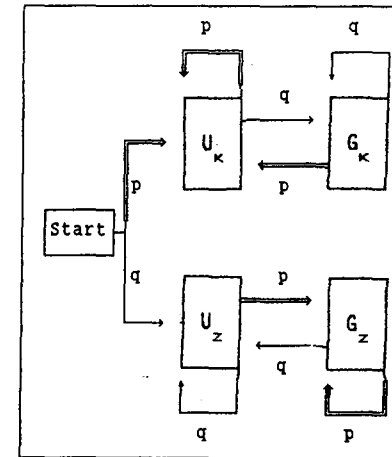


Abb. 3 Vereinfachte Markov-Kette

Analog ergibt sich aus der unteren Reihe: $P_Z(n, U_Z) = q$; hieraus folgt (unabhängig von n) als Wahrscheinlichkeit für ungerades r :

$$\begin{aligned} P(r \text{ ungerade}) &= p \cdot P_Z(U_Z) + q \cdot P_K(U_K) \\ &= p^2 + q^2 \\ &= p^2 + (1 - 2p + p^2) \\ &= 1 - 2p + 2p^2 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Literatur:

Holmes, P.: 1991, Computer-erzeugtes Denken. In: *Stochastik in der Schule* 11, Heft 3, 37-41.

Das Programm RUN-ZAHL.PAS und seine EXE-Version können beim Autor gegen Einsendung einer formatierten Diskette und eines frankierten Rückumschlags angefordert werden.

Adresse: Gerd Riehl, Obere Mark 6, 30890 Barsinghausen