Bivariate Daten

Roger Porkess
Center for Teaching Mathematics, University of Plymouth, England
Übersetzung: Ingeborg Strauß, Kronberg im Taunus

Zusammenfassung: Die Problematik beim Auswerten realer bivariater Daten - z.B. bei Projekt-Arbeit - wird intensiv diskutiert: die Angemessenheit der Vorgehensweise, die Prämissen bei der Anwendung theoretischer Modelle (Korrelation, Regression), das Modellieren von Tests sowie der adäquate Umgang mit voraussagefähigen Test-Verfahren

Einleitung

Das Thema Bivariate Daten ist, nicht überraschend, ein schwieriges. Selbst die meisten unserer Leistungskurs-Schüler hören nur etwas über eindimensionale Variable, was genügend Schwierigkeiten aufwirft. Daher ist es kaum erstaunlich, daß Schüler Probleme bekommen, wenn sie ohne Anleitung zweidimensionale Daten sammeln.

Die meisten Prüfungsfragen werden so gestellt, daß sie die Kandidaten auf die Verfahren stoßen, die den gegebenen Größen angemessen sind. Damit ist die Situation unter der Kontrolle des Prüfenden. Völlig anders, wenn die Probanden ihre eigenen Daten sammeln und auswerten sollen. Die Probleme, die diese Freiheit mit sich bringt, waren Anlaß für eine lebhafte Debatte, besonders in Hinsicht auf bivariate Daten.

Der Einsatz angemessener Verfahren

Die Berechnungen, die Schüler bei bivariaten Daten durchzuführen haben, fallen in zwei Kategorien: Regression und Korrelation. Regression wird oft beschränkt auf Variable, von denen nur eine zufallsbedingt ist, obgleich es auch vorkommen kann, daß beide randomisiert sind. Um den Korrelationskoeffizienten als Testgröße einzusetzen, müssen beide Variable zufallsabhängig sein.

Angenommen, ein Schüler zieht ein Küken auf und wiegt es jeden Tag, 50 Tage lang. Die Daten sind zufällig (Gewicht) und nicht-zufällig (Alter). Was ist bei einer Projekt-Arbeit zu tun, die einen Signifikanz-Test für den Korrelations-Koeffizienten verlangt? Ganz klar, ein solcher Test kann bei diesen Daten nicht durchgeführt werden.

Ein Gesichtspunkt ist, daß, wenn man solches Vorgehen in Kauf nehmen würde, man falsche Mathematik billigen würde. Andere Prüfer argumentieren vielleicht, daß das Projekt im Kontext zu sehen ist, daß nämlich der Schüler die Initiative

Stochastik in der Schule 17(1997), Heft 2, S. 29-38
Übersetzung aus Teaching Statistics 18(Autumn 1997)3, S. 76-80

ergriffen und interessante Daten gesammelt hat. Die Tatsache, daß seine Interpretation nicht ganz richtig ist, sollte ihm dabei nicht zu negativ angekreidet werden. Das letzte, was man als Pädagoge will, ist ja eine Situation, in der Schüler zu frustriert sind, um zukünftig Eigeninitiative zu entwickeln, nur weil sie etwas falsch angepackt haben. Zudem ist es ein wertvolles Kriterium bei solchen Unternehmungen, wenn sie entdeckerisch und damit unvorhersagbar sind.

Ich glaube, daß - wie ich - viele meiner Kollegen beiden Standpunkten etwas abgewinnen können. Ein Konflikt läßt sich vermeiden unter der Voraussetzung, daß die Schüler gesunden Menschenverstand walten lassen und daß sie darauf achten, daß von ihnen angewandte Verfahren auf theoretischen Modellen mit all ihren Prämissen basieren.

Gesunder Menschenverstand

Vor Beginn einer Projekt-Arbeit sollte der Schüler sich zwei einfache Fragen stellen:

1. Bin ich wirklich an der Antwort interessiert?

Nehmen wir das Hühnchen-Beispiel. Die Vermutung des Schülers ist, daß das Gewicht eines Kükens mit seinem Alter zunimmt. Um das herauszufinden, benötigt man kein statistisches Experiment, da der Sachverhalt offensichtlich ist. Wenn der Schüler jedoch einen mathematischen Term für die Abhängigkeit zwischen Gewicht und Alter ermittelt, ist dies ein wertvolles Resultat. Die Regressions-Gerade, die für den Zusammenhang zwischen zufälligen und nicht-zufälligen Daten errechnet wird, führt zu solch einer Formel, vorausgesetzt es liegt tatsächlich Linearität vor (was sicher nicht die ganze Wahrheit ist).

Ein andersgeartetes Beispiel: Jemand möchte die verbreitete Ansicht überprüfen, daß ein Schüler mit guten Mathematik-Ergebnissen auch in Musik erfolgreich ist und umgekehrt. Die Daten mögen aus einer Stichprobe stammen, die die Noten in beiden Fächern auflistet. In diesem Fall ist natürlich der Signifikanz-Test auf der Basis des Korrelations-Koeffizienten gefordert: Die beiden Variablen sind in der Tat zufällige.

Ein guter Selbst-Test für den Schüler ist, sich zu fragen, ob er wirklich an den Ergebnissen seiner Arbeit interessiert ist. Wenn die Antwort Nein lautet, kann das an inadäquaten Untersuchungsmethoden liegen. Nach Möglichkeit sollte er versuchen, ein Sujet zu finden, das ihn fesselt. Ist die Antwort dagegen Ja, dann hat er höchstwahrscheinlich angemessene Verfahren eingesetzt.

Das alles klingt ein bißchen banal, aber es kann vernünftige Gründe geben, warum so etwas passiert. Die zur Diskussion stehenden Verfahren sind die, die Statistiker bei realen Problemen anwenden und die als solche für viele Menschen von Bedeutung sind. Statistiker werden nicht dafür bezahlt, daß sie ihre Arbeitszeit mit alltäglichen oder belanglosen Dingen - wie ‚ein Küken wird mit zunehmendem Alter schwerer' - totschlagen. Zudem wurden die statistischen Kalküle nicht für solche Trivialitäten entwickelt.

Eine wichtige Implikation des eben Gesagten ist, daß Lehrer es vermeiden sollten, den Schüler Daten für ihr Projekt vorzugeben. Die Planungsphase, das Überlegen, welche Daten zu sammeln sind, wie dies bewerkstelligt werden kann und wie sie ausgewertet werden können, ist ein essentieller Teil des gesamten Prozesses. Verzichtet man darauf, erhält man wahrscheinlich nur ein armseliges Ergebnis. Lehrer sollten die Projekt-Planung nutzen, um mit den Schülern ins Gespräch zu kommen und Tips zu geben.

2. Ist meine y-Variable zufällig?

Angenommen ein Experiment, bei dem Salz in unterschiedlicher Konzentration x in Wasser gelöst wird und dann der Siedepunkt y gemessen wird. Vorausgesetzt, daß der Versuch so sauber durchgeführt wird, daß experimentelle Fehler vernachlässigbar sind, dann sollte - theoretisch - für irgendeinen Wert von x stets derselbe Wert von y resultieren. Hier ist kein Platz für den Zufall, die Situation ist deterministisch.

Man betrachte dagegen eine DIN-A4-Seite mit Text in Zeilen der Standardlänge und mit einheitlicher Font-Größe x. Man zähle die Wörter y in einer vollen Zeile. Für ein bestimmtes x erhält man verschiedene y. Einige Zeilen enthalten mehr Wörter als andere. Es wird sich stets eine Verteilung der Werte von y ergeben. Die Situation ist zufällig, auch stochastisch genannt.

Statistik läßt sich nur auf stochastische Situationen anwenden. Trotzdem kann die Entscheidung diesbezüglich nicht immer ganz eindeutig getroffen werden, aus zwei Gründen.

(i) Jedes experimentelle Ergebnis enthält aus dem einen oder anderen Grunde einen Zufalls-Fehler, daher können die Daten als stochastisch erscheinen. (In solchen Fällen ist die Regressions-Gerade mit ihren minimierten Quadraten sehr hilfreich.)

(ii) Viele „Gesetze" basieren weniger auf experimentellen Untersuchungen als auf dahinterstehenden etablierten Theorien. Es kann daher sein, daß sie substantielle Elemente einer zufälligen Variation überdecken.

Statistisches Modellieren

Eine Schülerin sammelte während eines biologischen Feldversuches Daten über einen bestimmten Seetang-Typ: Sie maß den Durchmesser y des wurzelähnlichen Haftorgans [= Rhizoid, vgl. die Abb. rechts, *d. Ü.*] sowie dessen Länge x für 75 Exemplare. In ihrer darauffolgenden Ausarbeitung berechnete sie den Korrelations-Koeffizienten und zeigte dessen Signifikanz. Als sie ihre Daten auswertete, kategorisierte sie sie in drei Gruppen gleichen Umfangs von 25 ein, nämlich für die Exemplare, deren Arme sich in Landrichtung neigten, in Richtung des offenen Meeres oder senkrecht nach oben. Dann berechnete sie die Korrelations-Koeffizienten für jede dieser Gruppen und zeigte, daß sich jeweils ein stärkerer Korrelations-Grad ergab als in der Gesamtmenge. (Sie ermittelte auch die Regressions-Geraden und gab eine plausible Erklärung für die Differenzen.)

Das Mädchen sammelte und analysierte die Daten, weil das für den Biologie-Unterricht gefordert war. Die Testmethode geht davon aus, daß die Daten einer bivariaten Normalverteilung entstammen, und das liegt weit jenseits sowohl des Mathematik- als auch des Biologie-Lehrplans selbst für Leistungskurs-Schüler.

Eine Beurteilungmöglichkeit dieses Projektes ist, sich zu sagen, daß die Schülerin zwar für Biologie eine interessante und den Unterricht bereichernde Arbeit abgeliefert hat, diese jedoch in mathematischer Hinsicht ungenügend ist, weil das Mädchen nicht die Relevanz ihrer Untersuchungsmethode gezeigt hat. Solch eine Position ist unhaltbar. Es gibt für die Schülerin keinen ihr zur Verfügung stehenden formalisierten Test, der diese Überprüfung gestattet hätte. Und in der Tat gibt es nur einen Weg zur Verifikation oder Falsifikation, nämlich die, die gesamte Population zu untersuchen. Noch wichtiger ist, daß, selbst wenn sie die gesamte Population hätte zugrundelegen können, sie sehr wahrscheinlich herausgefunden hätte, daß keine genau bivariate Normalverteilung vorliegt, wenn auch eine ihr sehr ähnliche. Andere Projekte könnten auf Populationen zugreifen, deren Daten weit von einer bivariaten Normalverteilung entfernt sind. Das Spektrum dazwischen ist groß. Tatsächlich erfüllt ja kein stochastischer Datensatz exakt die geforderte Voraussetzung.

Heißt das etwa, daß die Mathematiker ein theoretisches Testverfahren produziert haben, das man niemals in der Praxis anwenden kann? Diese Frage geht ans Herz des statistischen Modellierungs-Prozesses. Der erste Schritt bei einer Modellierung ist, die Annahmen so zu vereinfachen, daß man mit der Arbeit beginnen kann. Im Falle der Seetang-Studie hätte die Schülerin nur zu sagen brauchen, daß sie unter der Prämisse einer bivariaten Normalverteilung argumentiert.

Ihr Modell ist dasjenige, das auf der Standard-Theorie und deren tabellierten kritischen Werten beruht. Die Frage ist daher nicht mehr, ob ihre Vorgehensweise richtig oder falsch ist, sondern nur noch, wie gut das von ihr gewählte Modell ist. Denn niemals wird man auf reale Daten treffen, die perfekt einer zweidimensionalen Normal- oder irgendeiner anderen theoretischen Verteilung genügen. Dennoch hofft man, daß die Daten den theoretisch erwarteten Werten ausreichend nahe liegen, damit man im Projekt fortfahren kann. (So geht man ja auch vor, wenn man z.B. den Luftwiderstand bei der Untersuchung eines mechanischen Problems vernachlässigt.)

Die theoretische Statistik liefert eine solche Fülle von Modellen, daß der Anwender sich kaum zu entscheiden vermag. Konfrontiert mit realen Daten, versucht man das geeignetste Modell auszuwählen, um dessen Tests anzuwenden.

Das enthebt uns nicht der immer zu stellenden Frage: Wie gut approximiert das Modell die Daten? Doch Achtung, es sind die Daten, die die Realität widerspiegeln, daher muß sich das Modell diesen anpassen, nicht umgekehrt. Ein robuster statistischer Test ist einer, der tolerant gegenüber Daten ist, denen das Modell nicht besonders gut angepaßt ist.

Ein wesentlicher Unterschied besteht bei Modellierung-Verfahren in der Statistik und im Bereich der Mechanik. Die Theorie statistischer Modelle ist häufig sehr kompliziert, weshalb viele Leute die zugehörigen Tests ohne Verständnis des Hintergrundes anwenden, weil sie die Prämissen gar nicht richtig einschätzen können. Die vereinfachenden Annahmen sind nur insoweit einfach, als sie die Anwendung eines Standard-Modells erlauben. Konträr dazu sind die meisten Modelle in der Mechanik anfangs im wesentlichen einfach und daher verständlich.

Modellierungs-Annahmen

Bevor man nachschaut, ob die Modellierungs-Annahmen den Daten wirklich standhalten, müssen Schüler sich eine dritte Frage stellen.

3. *Ist meine x-Variable stochastisch?*

Häufig ist der Schlüssel zur Antwort die Art und Weise, in der die Daten gesammelt wurden. Hat man zunächst das x ins Auge gefaßt und dann das y mit Hilfe eines Zufallspozesses bestimmt (z.B. indem man Messungen zu festen Zeiten vorgenommen hat)? Oder hat ein Zufallsgenerator das Element einer Population ausgewählt, von dem dann x und y ermittelt wurden? Im ersten Falle ist x nicht stochastisch, im zweiten Falle im allgemeinen schon. Obige Schülerin begann mit dem Sammeln von Seetang, danach maß sie die Länge und Dicke des Rhizoids: Also waren beide Variable stochastisch.

Zusätzlich ist es hilfreich zu überlegen, ob die Begriffe *unabhängig* bzw. *abhängig* greifen. Vor der Entscheidung, welche Variable man als x und welche man als y ansieht, prüfe man, welche von welcher abhängig ist. Wenn, wie bei der Seetang-Studie, diese Frage nicht zu entscheiden ist, sind wahrscheinlich beide zufällig. Wenn andererseits die Abhängigkeit einer Größe von einer zweiten zu untersuchen ist, besteht kein Zweifel, welche als unabhängig und damit nicht-stochastisch anzusehen ist.

Korrelation

Von Leistungskurs-Schülern erwartet man im allgemeinen das Wissen, daß folgende zwei Hypothesen-Tests auf dem Korrelations-Koeffizienten basieren.

(i) Der Produktmoment-Korrelationskoeffizient

Dieser testet die lineare Korrelation und erfordert die Modell-Annahme, daß die Population eine bivariate Normalverteilung aufweist.

(ii) Der Spearmansche Rang-Korrelation-Koeffizient

Dies ist ein Test auf - nicht unbedingt lineare - Monotonie (d.h. eine Variable steigt oder fällt monoton, während die andere monoton wächst). Diesem Verfahren liegt keine spezielle Verteilung zugrunde. Statistiker kennzeichnen es deshalb als *verteilungs-frei* oder *nicht-parametrisch.*

Regression

Die Standard-Gleichung der Regressions-Geraden

$$y - \bar{y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}(x - \bar{x})$$

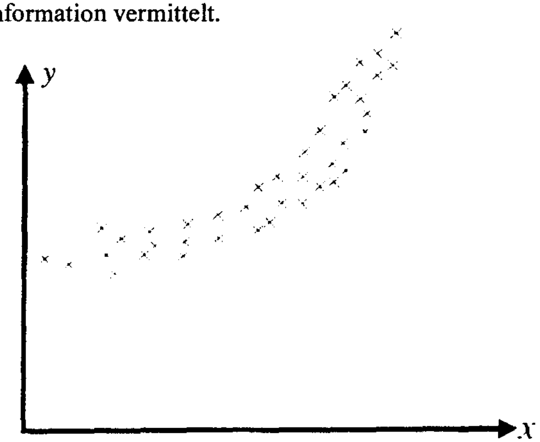
kann von zwei unterschiedlichen Modellen abgeleitet werden:

(i) Ist die y-Variable stochastisch und die x-Variable nicht, folgt die Gleichung aus der Minimierung der Summe der Residuen-Quadrate. Dabei denke man sich y als *abhängige* und x als *unabhängige Variable.*

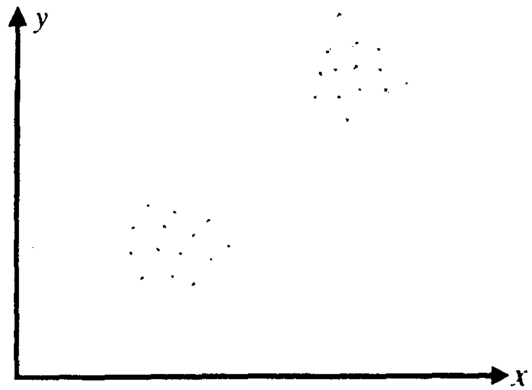
(ii) Auch aus der gänzlich anderen Prämisse einer bivariaten Normalverteilung und mit völlig anderen mathematischen Methoden erhält man dieselbe Gleichung. Entstammen die Daten einer solchen Verteilung, dann sind beide Variable randomisiert. Das Umgekehrte trifft dagegen nicht zu, denn es ist durchaus möglich, daß beide Variable stochastisch sind, ohne zweidimensional normalverteilt zu sein.

Die glückliche Koinzidenz beider Situationen mit der Konsequenz, daß sie auf dieselben Regressions-Gerade führen, heißt nichts anderes, als daß diese Gleichung viele Probleme dieser Art „erschlägt", doch darauf sollten die Schüler nicht blind vertrauen. Sie sollten das Streu-Diagramm zeichnen und interpretieren. Liegen die Datenpunkte näherungsweise beiderseits einer Geraden, kann eine Linearität zwischen den beiden Variablen vorliegen. Zeigen die Datenpunkte eine annähernd elliptische Verteilung, können sie aus einer bivariat normalverteilten Population stammen. Genauso wichtig ist, wenn ein Streu-Diagramm eine diesbezüglich negative Information vermittelt.

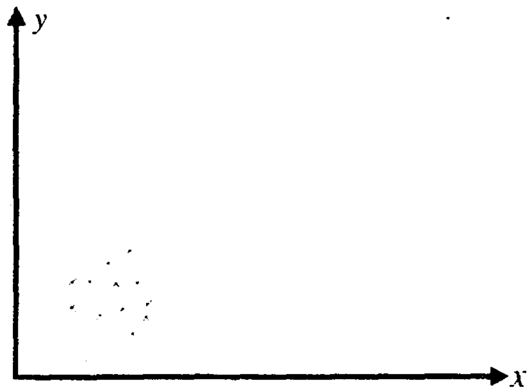
- Eine bananenförmige Verteilung zeigt an, daß der Variablen-Zusammenhang nicht-linear ist und damit einen nicht-parametrischen Test (z.B. Spearmans Rang-Korrelations - Koeffizienten) erfordert:



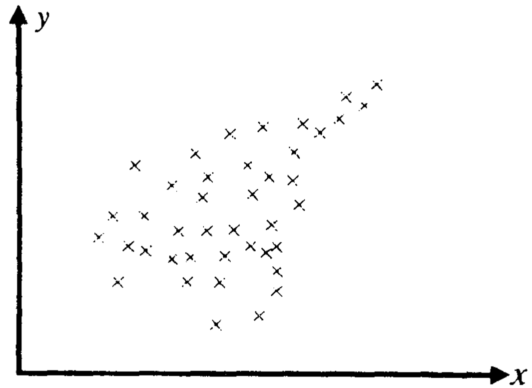
- Eine Verteilung, bei der die Datenpunkte sich auf zwei Inseln verteilen, signalisiert eine bimodale Population. Das kann Schwierigkeiten heraufbeschwören. Jedes Ergebnis sollte daher mit großer Vorsicht betrachtet werden, denn es kann der falsche Eindruck von Linearität aufkommen:



- Auch auf Ausreißer muß man achten, da sie einen immensen Einfluß auf das Ergebnis haben können:



- Ergebnisse aus einer trichterförmigen Verteilung sind wahrscheinlich ungenau oder gar falsch.



Voraussage-Modelle

Besonders wertvoll ist der Einsatz der Regression, um ein *Voraussage-Modell* zu konstruieren. Das wird im nächsten Beispiel illustriert, an dem wir auch Möglichkeiten für weitere Fragestellungen in einem Projekt diskutieren.

Vor einigen Jahren startete ich zusammen mit Schülern einer 11. Klasse eine Untersuchung, um einen eventuellen Zusammenhang zwischen einem simulierten Examens-(Vor-)Test x und der dann erreichten Examens-Endnote y [entspricht in etwa unserer Note in der schriftlichen Abiturprüfung; auch wir lassen ja zuvor eine Klausur unter Abiturbedingungen schreiben. *D. Ü.*]. Die Schüler berechneten aus den etwa 35 Datenpaaren die Gleichung der Regressions-Geraden zu

$$y = 25 + 0{,}75x\ .$$

Ich war über dieses Ergebnis perplex, bis ich merkte, daß die Gleichung umgeformt werden kann zu

$$y = x + \frac{100 - x}{4}\ .$$

Diese Gleichung kann als Voraussage interpretiert werden: Die Schüler erhalten im Schnitt eine um ein Viertel bessere Examensnote als beim Vor-Test. Als Daumenregel fand ich diese Gleichung sehr hilfreich.

Die angewandte mathematische Prozedur kann summarisch wie folgt beschrieben werden: Die Aufgabe war, ein *lineares Voraussage-Modell* für den Zusammenhang Vornote-Endnote zu entwickeln. Das Modell mußte also von der Form

$$y = a + bx$$

sein, was dann zu

$$y = x + p(q - x) \text{ mit } p = 1 - b \text{ und } q = \frac{a}{1 - b}$$

umgeformt werden kann.

Geeignete Daten werden gesammelt und die Größen von a und b wie besprochen berechnet. Damit ist das Modell aufgestellt, fertig zum Einsatz.

Bis dahin wurden keine Modell-Voraussetzungen über die Art der Verteilung der Variablen vorgenommen oder erforderlich. Aber die Entscheidung, die Methode der kleinsten Quadrate zu benutzen, impliziert die Erwartung, daß die Fehler des linearen Modells den Mittelwert 0 haben, daß konstante Varianz vorliegt und die Variablen unkorreliert sind. Dennoch bleibt die Frage: Wie gut ist das Modell? Diese Frage ist essentiell bei allen Modellen. Bis jetzt kann man nicht entscheiden, ob das Modell brauchbar genau oder unbrauchbar ist.

(a) Die Tatsache, daß im obigen Beispiel $q = 100$ und p ein glaubwürdiger Bruchteil von 1 ist, berechtigt zum Vertrauen in das Modell.

(b) Das Modell basiert auf der Annahme, daß eine lineare Beziehung vorliegt, was nur dann gilt, wenn die Datenpunkte genügend eng um eine Gerade herum streuen.

(c) Das Modell greift auf vergangene Daten zurück mit der Intention, Voraussagen daraus ableiten zu können. Daher ist der wirkliche Test nicht der, wie gut die benutzten Daten erklärt werden (obgleich eine präzise Beschreibung einer großen Datenmenge unser Vertrauen in die statistische Vorgehensweise stützt), entscheidend ist, wie gut das Modell in späteren Jahren und in anderen Situationen arbeitet. Das wirft für unser Beispiel Probleme auf, denn wer mag schon wünschen, daß sich die Bedingungen exakt wiederholen, etwa durch den Einsatz derselben Aufgaben jedes Jahr?

(d) Obgleich es in unserem Beispiel so aussieht, als seien die beiden Variablen von genau gleichem Typ, so haben sie doch fundamental verschiedenen Status, was die Voraussage angeht. Die „echte" Prüfungsnote wird erst noch gegeben, und das Resultat ist sicherlich stochastisch. Der Vor-Test dagegen hat schon stattgefunden, die Noten sind bereits erteilt. Letztere sind der unabhängigen Variablen x zugeordnet, die Examensnoten der abhängigen Variablen y.

(e) Für irgendeinen x-Wert bekommt man einen y-Bereich, daher ist diese Variable zufällig. Schließlich ist nicht zu erwarten, daß jeder Schüler, der im Vor-Test 44% der Arbeitspunkte erreichte, in der Abschluß-Klausur mit genau 58% abschneidet. Einige werden darüber, andere darunter liegen. Man erhält also eine Verteilung der y-Werte zum x-Wert 44. Das heißt, daß das Modell nur den mittleren y-Wert für irgendein x voraussagt.

Damit ist klar, daß die Schreibweise, die wir bislang benutzt haben, in dieser Hinsicht inadäquat ist. Man muß zwischen dem Namen der Variablen und dem speziellen Wert, den sie annehmen kann, unterscheiden. Bekanntlich ist dafür der Gebrauch von Großbuchstaben (X, Y, ...) üblich mit hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Kleinbuchstaben (x, y, ...) für die speziellen Ausgänge. Der Mittelwert von Y für einen speziellen Wert von X kann demnach in der Form

$$E(Y \mid X = x)$$

geschrieben werden, womit dem Voraussage-Modell die Gleichung

$$E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta x$$

zugeordnet ist.

In dieser Schreibweise nimmt das Modell (unter der Prämisse einer einfachen zufällig/nicht-zufälligen Regressionsgeraden) die Form

$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

an mit ε als Zufalls-Fehler.

In den obigen Termen werden manchmal statt der griechischen Buchstaben die lateinischen a und b benutzt. Da man jedoch bei Berechnung der Gleichungen Stichproben-Daten zur Schätzung der Parameter einsetzt, sollte man die griechischen Buchstaben wählen, denn die lateinischen sollten der Gesamt-Population vorbehalten sein.

(f) Gibt es eine vernünftige theoretische Basis für das Modell? Die Frage, ob ein lineares Modell wirklich angemessen ist, führt unsere Überlegungen auf einem höheren Level weiter. Gute Schüler erkennen die Wichtigkeit dieser Frage und versuchen eine qualitative Erklärung oder Interpretation.

Test-Modellierung ist derzeit Teil unseres Leistungskurs-Lehrplans, da diese Techniken für die Statistik fundamental sind.

Schluß

Die Tatsache, daß Projekt-Arbeit, basierend auf realen Daten, Probleme aufwirft, die sonst unter den Teppich gekehrt werden, ist ein guter Grund, sich damit zu beschäftigen. Wenn Schüler nicht lernen, wie man mit realen Daten umgeht, was soll dann Schul-Statistik überhaupt?

Anmerkung der Übersetzerin

Unter der Überschrift „Verteilungsunabhängige Abhängigkeitsmaße" schreibt Lothar Sachs in seinem Standardwerk *Angewandte Statistik*, Springer-Verlag ^{7}1992 ab S. 510 folgendes:

Sehr handlich ist auch die aus dem Eckentest entwickelte, zu Übersichtszwecken geeignete, mediale oder **Quadranten-Korrelation** nach Quenouille. Ähnlich wie der Rangkorrelationskoeffizient hat der Quadranten-Korrelationskoeffizient und die Prüfgröße des Eckentests den Vorteil, bei jeder Verteilungsfunktion einen *gültigen Test* zu liefern, die *Wirkung von Ausreißern abzuschwächen* und *unabhängig vom Maßsystem zu sein*. ...

[S. 515] **Quadrantenkorrelation** Dieser Schnelltest ... prüft, ob zwischen zwei als Meßwerten gegebenen Merkmalen x und y Unabhängigkeit besteht. Zunächst zeichnet man die Wertepaare (x_i, y_i) als Punktwolke in ein Koordinatensystem ein, das durch die beiden Medianwerte $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ in 4 Quadranten bzw. in 2mal 2 Hälften geteilt wird, und zwar so, daß jede Hälfte gleich viele Wertepaare enthält. Liegt eine ungerade Anzahl von Beobachtungspaaren vor, dann ist die horizontale Medianlinie durch einen Punkt zu legen, der anschließend ignoriert wird. Ein echter Merkmalszusammenhang besteht, sobald die Anzahl der Wertepaare in den einzelnen Quadranten die Schranken der Tabelle [S. 516] erreicht bzw. nach außen überschreitet. Liegen Stichproben aus einer zweidimensionalen Normalverteilung vor, dann hat dieser Test eine asymptotische Effizienz gegenüber dem Produktmomentkorrelationskoeffizienten von $(2/\pi)^2 = 0{,}405$ oder 41%. ... Dieser Test ist praktisch der *Median-Test auf Unabhängigkeit*, bei dem die nach x oder y geordneten Paare jeweils danach aufgeteilt werden, ob die Paarlinge kleiner oder größer sind als ihr Median. ...

Der Eckentest nach Olmstead und Tuckey Dieser Test nutzt im allgemeinen mehr Information als die Quadrantenkorrelation. Er ist besonders geeignet zum Nachweis der Korrelation, die weitgehend auf Extremwertepaaren basiert ... . Prüfgröße dieses wichtigen Schnelltests auf Unabhängigkeit (asymptot. Effiz.: etwa 25%) ist die Summe S von 4 „Quadrantensummen" [detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise zur Ermittlung von S]. Für $|S| \geq S_\alpha$ wird, dem Vorzeichen von S entsprechend, ein positiver bzw. negativer Zusammenhang angenommen [S. 518 Tabelle für (α, S_α); Hinweise; Beispiel].