Erfahrungen mit zwei GK–Abituraufgaben aus der Stochastik

von Heinz Althoff, Bielefeld

Zusammenfassung: Der Autor stellt zwei Stochastikaufgaben vor, die am Helmholtz-Gymnasium Bielefeld in Grundkurs-Abiturprüfungen eingesetzt wurden, und berichtet über die Erfahrungen mit diesen Aufgaben.

Die *Aufgabe 1* bildete zusammen mit einer gleichwertigen Analysisaufgabe die Abiturklausur 1996 für zwei Grundkurse (Bearbeitungszeit: 3 Zeitstunden); in sehr ähnlicher Formulierung kam sie auch schon im Abitur 1991 im Grundkurs vor.
Die *Aufgabe 2* habe ich im 4. Abiturfach (nur mündliche Prüfung) bei drei Schülern mit unterschiedlicher Leistungsfähigkeit in den Jahren 1993 bzw. 1995 eingesetzt. Zur Lösung der Aufgabe und zur Vorbereitung der Darstellung dieser Lösung vor dem Prüfungsausschuß standen ca. 40 Minuten zur Verfügung; in dieser Zeit sollten auch wesentliche Teile der Lösung auf eine OH–Folie geschrieben werden.

Aufgabe 1

Eine Firma stellt elektronische Bausteine her; erfahrungsgemäß sind durchschnittlich 14% der produzierten Bausteine defekt. Die defekten Bausteine werden nicht aussortiert; die Kunden werden über den durchschnittlichen Ausschußanteil informiert.

a) Es werden

a_1) der laufenden Produktion,

a_2) einem Paket mit 100 Bausteinen, von denen genau 14 defekt sind,

jeweils 6 Bausteine zufällig entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter den 6 ausgewählten Bausteinen höchstens ein defekter Baustein?

Hilfe: Bei der Zahlenrechnung können zusätzlich zu den in der Tabelle angegebenen Zahlenwerten für Binomialkoeffizienten noch folgende Näherungswerte benutzt werden:

$$\binom{86}{6} = 4,7015 \cdot 10^8 \quad \binom{86}{5} = 3,4826 \cdot 10^7 \quad \binom{100}{6} = 1,1920 \cdot 10^9$$

Stochastik in der Schule 17(1997) Nr. 3, S. 18-26

b) Ein defekter Baustein wird von einem Prüfgerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% als defekt erkannt. Das Prüfgerät zeigt allerdings auch einwandfreie Bausteine fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% als defekt an.

b_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Prüfgerät einen der laufenden Produktion entnommenen Baustein als defekt an?

b_2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Prüfgerät die richtige Entscheidung trifft?

b_3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Baustein tatsächlich defekt, wenn das Prüfgerät „defekt“ anzeigt?

c) Die Firma hat die Erfahrung gemacht, daß etwa 80% der von ihr produzierten Bausteine das erste Betriebsjahr überstehen. Ein Kunde glaubt, daß dieser Anteil in Wirklichkeit deutlich niedriger ist. Die Firma ist deshalb bereit, auf ihre Kosten den Sachverhalt von einem neutralen Gutachter mit einer Stichprobe vom Umfang 50 testen zu lassen; als Signifikanzniveau wird 10% vereinbart.

c_1) Erläutern Sie, worauf der Gutachter bei der praktischen Durchführung seines Auftrages zu achten hat.

c_2) Welche Hypothese ist als Nullhypothese zu nehmen, wenn man bedenkt, daß die Firma (als Bezahler) der Auftraggeber ist? Geben Sie eine möglichst genaue Begründung für Ihre Wahl an.

c_3) Berechnen Sie eine optimale Entscheidungsregel für die oben gegebenen Daten.

c_4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mit der in c_3) ermittelten Entscheidungsregel eine Fehlentscheidung getroffen, wenn in Wirklichkeit nur 70% der Bausteine das erste Betriebsjahr überstehen?

c_5) Was könnte der Kunde tun, wenn ihm die in c_4) berechnete Fehlerwahrscheinlichkeit zu hoch ist?

Aufgabe 2

Eine Krankenkasse führt regelmäßig Entwöhnungskurse für Raucher durch. Sie geht von einer Erfolgsquote von 40% aus, d.h. daß ein Jahr nach Beendigung des Kurses durchschnittlich etwa 40% der Kursteilnehmer als Nichtraucher betrachtet werden können.

a) Herr A. berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von 20 Kursteilnehmern genau 8 zu Nichtrauchern werden, mit Hilfe des Ansatzes $P(X=8) = \binom{20}{8} \cdot 0,4^8 \cdot 0,6^{12}$.

   a_1) Welche Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens der Kursteilnehmer macht Herr A. bei seinem Ansatz?

   a_2) Ermitteln Sie den Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit.

   a_3) Erläutern Sie, welche inhaltliche Bedeutung die Faktoren im Ansatz von Herrn A. haben.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei 300 Kursteilnehmern der Erwartungswert für die Anzahl der „Erfolge" um wenigstens 10% überschritten?

c) Der Leiter der Raucherentwöhnungskurse in B. behauptet, daß *seine* Erfolgswahrscheinlichkeit deutlich höher als 40% liegt. Wie ist ein Signifikanztest anzulegen, mit dem die *schwächere* Behauptung „Die Erfolgswahrscheinlichkeit liegt über 40%" auf einem Signifikanzniveau von 10% abgesichert werden kann?
Hinweis zu c): Eine *konkrete* Entscheidungsregel braucht nicht unbedingt ermittelt zu werden, es genügt eine (möglichst genaue) Erläuterung, wie man sie ermitteln könnte.

In den Grundkursen wurden zwei Halbjahre Stochastik unterrichtet, das Buch Althoff, 1985a wurde dabei weitgehend durchgearbeitet (mit Lücken im Kapitel 6). Die Schülerinnen und Schüler taten dies in zunehmendem Maße selbständig, wobei Ihnen das Lösungsheft Althoff, 1985b eine gute Hilfe war.
Als Hilfsmittel standen den Prüflingen zur Bearbeitung ihrer Aufgabe in der Abiturprüfung die lose Formelsammlung aus Althoff, 1985a und ein nicht programmierbarer Taschenrechner zur Verfügung.

Im folgenden ist dargestellt, welche Leistungen wir von den Prüflingen in etwa erwarteten (bzw. erhofften).

Lösung zu Aufgabe 1:

a) X sei die Anzahl der defekten Bausteine unter den 6 zufällig entnommenen Bausteinen.

   a_1) Da es sich um eine kleine Stichprobe aus einer großen Gesamtheit ("laufende Produktion") handelt, kann X als näherungsweise binomialverteilt angesehen werden mit den Parametern $n = 6$ und $p = 0,14$ (Wahrscheinlichkeit, daß zufällig ausgewählter Baustein defekt ist).
   Dann ist $P(X \leq 1) = B(6; 0,14; 1) =$
   $\binom{6}{0} \cdot 0,14^0 \cdot 0,86^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,14^1 \cdot 0,86^5 = \cdots = 0,80.$

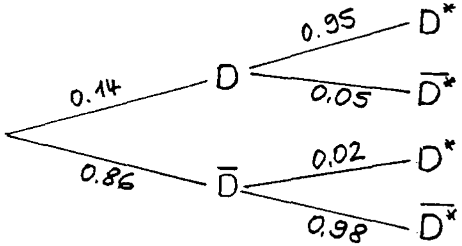
   a_2) Jetzt ist X hypergeometrisch verteilt, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen aus einer kleinen Gesamtheit (Umfang 100) handelt. Es ist

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \frac{\binom{14}{0} \cdot \binom{86}{6} + \binom{14}{1} \cdot \binom{86}{5}}{\binom{100}{6}} \\ &= \frac{4,7015 \cdot 10^8 + 14 \cdot 0,34826 \cdot 10^8}{11,920 \cdot 10^8} \\ &= 0,803 \end{aligned}$$

b) Für einen ausgewählten Baustein seien folgende Ereignisse definiert:

$D \;\hat{=}\;$ Baustein defekt
$\overline{D} \;\hat{=}\;$ Baustein ist einwandfrei (nicht defekt)
$D^* \;\hat{=}\;$ Baustein wird von Prüfgerät als defekt eingestuft
$\overline{D}^* \;\hat{=}\;$ Baustein wird vom Prüfgerät als einwandfrei (nicht defekt) eingestuft
$R \;\hat{=}\;$ Das Prüfgerät trifft eine richtige Entscheidung.

In den nachstehenden Baum sind die gegebenen Wahrscheinlichkeiten eingetragen. Anhand des Baumes können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnet werden:



b$_1$) $P(D^*) = 0,14 \cdot 0,95 + 0,86 \cdot 0,02 \approx 0,15$
b$_2$) $P(R) = 0,14 \cdot 0,95 + 0,86 \cdot 0,98 \approx 0,98$
b$_3$) $P_{D^*}(D) = \dfrac{0,14 \cdot 0,95}{0,14 \cdot 0,95 + 0,86 \cdot 0,02} \approx 0,89$

c) Für den in dieser Teilaufgabe zu behandelnden einseitigen Signifikanztest werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$X \widehat{=}$ Anzahl der Bausteine in der Stichprobe vom Umfang $n = 50$, die das erste Betriebsjahr überstehen

X ist näherungsweise binomialverteilt, weil es sich um eine kleine Stichprobe aus einer großen Gesamtheit (der laufenden Produktion) handelt; dabei ist $n = 50$ und p die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Baustein das erste Betriebsjahr übersteht.

c$_1$) Der Gutachter hat darauf zu achten, daß die Benutzer der Bausteine nicht wissen, welche Bausteine zur Stichprobe gehören. Die Benutzer müssen für alle (numerierten!) Bausteine, die in der gleichen Zeit wie die für die Stichprobe ausgewählten Bausteine hergestellt wurden, angeben, ob sie das erste Betriebsjahr überstanden haben, der Gutachter ermittelt daraus dann das Ergebnis für die Stichprobe.

c$_2$) Für die produzierende Firma als Bezahler des Tests besteht der schwerere Fehler darin, daß dem Kunden geglaubt wird, obwohl der Erfahrungswert 80% der Firma stimmt. Als Nullhypothese H_0 ist deshalb zu wählen:

H_0: $\quad p = 0,8$ ("der Erfahrungswert der Firma stimmt")

Da als Gegenteil nur die Meinung des Kunden interessiert, handelt es sich um einen einseitigen Signifikanztest mit $\overline{H}_0 : p < 0,8$.

c$_3$) Man wählt folgende Form für die Entscheidungsregel:

$$\text{Verwirf } H_0 \Leftrightarrow X \leq a$$

Für die optimale Entscheidungsregel benötigt man die größte Zahl $a \in \mathbb{N}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} & P_{p=0,8}(X \leq a) \leq 0,1 \\ \Leftrightarrow\ & B(50; 0,8; a) \leq 0,1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - B(50; 0,2; 49 - a) \leq 0,1 \\ \Leftrightarrow\ & B(50; 0,2; 49 - a) \geq 0,9 \\ \Leftrightarrow\ & 49 - a \geq 14 \\ \Leftrightarrow\ & a \leq 35 \end{aligned}$$

Man glaubt also dem Kunden genau dann, wenn unter 50 zufällig ausgewählten Bausteinen nur 35 oder weniger das erste Betriebsjahr überstehen.

c$_4$) $P_{p=0,7}(X > 35) = 1 - B(50; 0,7; 35) = 1 - (1 - B(50; 0,3; 14)) = B(50; 0,3; 14) \approx 0,45$

c$_5$) Er könnte den Fabrikanten zum Beispiel um eine für den Kunden günstigere Entscheidungsregel oder um einen Test mit größerem Stichprobenumfang bitten. (Er könnte dafür zum Beispiel anbieten, einen Teil der Kosten zu übernehmen.)

Lösung zu Aufgabe 2:

a$_1$) Die Teilnehmer fällen unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit p die Entscheidung, "Nichtraucher" zu werden.

a$_2$) $b(20; 0,4; 8) \approx 0,18$

a$_3$) Der Entscheidungsprozeß kann als 20-stufiger Bernoulli-Versuch angesehen werden. Günstig sind alle 20-Tupel, die als Komponenten 8 mal "1" ($\widehat{=}$ Nichtraucher) und 12 mal "0" ($\widehat{=}$ Raucher) enthalten. Denkt man sich diese als Pfade in einem Baum, so liefert jede Komponente "1" den Wahrscheinlichkeitsfaktor 0,4 und jede Komponente

"0" den Wahrscheinlichkeitsfaktor 0,6; nach der Pfadregel hat dann jeder günstige Pfad die Wahrscheinlichkeit $0,4^8 \cdot 0,6^{12}$. Multipliziert man diese mit der Anzahl $\binom{20}{8}$ der günstigen Pfade (so viele Möglichkeiten gibt es, aus den 20 möglichen Komponenten 8 für "1" auszuwählen), so erhält man den Ansatz von Herrn A.

b) Die Zufallsgröße X_n($\widehat{=}$ Anzahl der "Erfolge" bei n Kursteilnehmern) kann unter den in a_1) gemachten Annahmen als binomialverteilt angesehen werden. Wegen $n \cdot p \cdot (1-p) = 72 > 9$ kann zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Laplace–Näherung benutzt werden. Es ergibt sich:

$$P(X_{300} \geq E(X_{300}) + 10\% \text{ von } E(X_{300})) = P(X_{300} \geq 120 + 12) = 1 - P(X_{300} \leq 131) \approx 1 - \Phi\left(\frac{131{,}5-120}{\sqrt{72}}\right) = 1 - \Phi(1,355) \approx 0,09$$

c) Da die Hypothese $p > 0,4$ abgesichert werden soll, ist das Gegenteil als Nullhypothese anzusetzen:

$$H_0 : p \leq 0,4 \qquad \overline{H}_0 : p > 0,4$$

Man legt den Stichprobenumfang n für die Befragung einer Zufallsstichprobe von Kursteilnehmern ein Jahr nach Kursende fest.

Eine brauchbare Entscheidungsregel hat die Form

$$\text{Verwirf } H_0 \Leftrightarrow X_n > a_n.$$

Gesucht ist die *kleinste* natürliche Zahl a_n, für die gilt:

$$P_{p=0,4}(X_n > a_n) \leq 0,1.$$

Diese Zahl a_n ermittelt man aus der Tafel für aufsummierte binomiale Wahrscheinlichkeiten (bzw. wie in b) unter Benutzung der Tafel für Φ).
Überprüft man die n Personen der Stichprobe, so gilt die Behauptung "Die Erfolgswahrscheinlichkeit liegt über 40 %" genau dann als auf dem Signifikanzniveau 10% abgesichert, wenn unter den n befragten Personen mehr als a_n Nichtraucher geworden sind.

Wenn man in Nordrhein–Westfalen die beiden Vorschläge für die schriftliche Abiturprüfung bei der Schulaufsicht einreicht, muß man neben den

Lösungen auch einen "Erwartungshorizont"hinzufügen (eine Hilfspunktwertung für die einzelnen Aufgabenteile wird seit einigen Jahren nicht mehr verlangt). Für die *Aufgabe 1*, zu deren Zusammenstellung als Anregung die Aufgabe W88/3 für Leistungskurse im Zentralabitur von BW diente, haben wir geschrieben:
"Aufgabe 1 deckt wesentliche Teile der im Unterricht behandelten Probleme aus der Stochastik ab.
In a) sind die zu benutzenden Modelle (einmal Binomialverteilung, einmal hypergeometrische Verteilung) zu erkennen und zu begründen; überdurchschnittlich aufwendig ist die Zahlenrechnung in a_2), deshalb sind Näherungswerte für Binomialkoeffizienten angegeben.
In b) geht es um Probleme im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von Bayes; dabei ist die Fragestellung in b_2) für die Schüler neu, dürfte aber trotzdem keine größeren Schwierigkeiten machen.
In c) ist das Testen von Hypothesen Thema der Problemstellungen. Dabei sind nicht nur Berechnungen durchzuführen wie in c_3) und c_4), sondern auch die Ansätze zu begründen wie in c_2) und c_3) und (für die Schüler in dieser Form neuartig und damit in Anforderungsbereich III zumindestens hineinreichend) allgemeine Überlegungen anzustellen und zu formulieren, die wie insbesondere in c_1) nur am Rande mit fach–mathematischen Problemen zu tun haben, wohl aber bei Anwendungen der Mathematik mit zu bedenken sind. Solche Überlegungen sind im Unterricht gelegentlich angesprochen worden, aber nicht in dem in c_1) vorkommenden Zusammenhang."

Die in beiden Kursen zusammen insgesamt 14 Prüflinge haben unsere Erwartungen weitgehend bestätigt. Die Stochastikaufgabe, bei der im Mittel 61% der Punkte erreicht wurden, wurde nur wenig schlechter bearbeitet als die Analysisaufgabe, bei der im Mittel 64% der Punkte geschafft wurden. Gegenüber der Vorzensur (im Mittel 9,0 KMK–Punkte) verschlechterten sich die Noten in der Abiturklausur (im Mittel 8,4 KMK–Punkte) weniger als allgemein üblich.

Wie die drei Teilaufgaben der Stochastikaufgabe von uns gewichtet und wie sie von den Prüflingen bearbeitet wurden, läßt sich der folgenden Tabelle entnehmen.

Teilaufgabe	erreichbare Punktzahl	im Mittel erreichte Prüfungsleistung (in %)
a	14	65
b	14	76
c	22	52
zusammen	50	61

Bei allen Teilaufgaben zeigten sich (teilweise deutliche) Unterschiede in der Bearbeitung durch die Prüflinge; in besonderem Maße gilt dies für c_3) bis c_5).

Auch die *Aufgabe 2* für die mündliche Abiturprüfung erwies sich in dieser Hinsicht als besonders geeignet. Vor allem die beim Vortrag erforderlichen Erläuterungen sorgten bei allen drei Teilaufgaben für eine deutliche Trennschärfe in bezug auf die Leistungsbewertung. Darüber hinaus boten alle Teilaufgaben auch gute Einstiegsmöglichkeiten in das sich an den Vortrag anschließende Prüfungsgespräch. Wie in /Althoff/Koller 1992/ bei ähnlichen Aufgaben ausführlich dargestellt, bieten sich z. B. ergänzende Betrachtungen zur Binomialverteilung und zur hypergeometrischen Verteilung ebenso an wie Ergänzungen und Vertiefungen beim Hypothesentest.

Literatur

[1] H. Althoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Verlag Metzler, Stuttgart 1985.

[2] H. Althoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Lösungen. Verlag Metzler, Stuttgart 1985.

[3] H. Althoff/D. Koller: Mündliches Abitur Mathematik. Klett Schulbuchverlag 1992.

Adresse des Autors:

StD Heinz Althoff
Ruschfeldweg 17
33 619 Bielefeld