

## Die Auflösung eines Wartezeit-Paradoxons oder Newton hatte nur teilweise recht!

von Norbert Henze, Karlsruhe

**Zusammenfassung:** In Ergänzung des Aufsatzes *Zog Pepys falsche Schlüsse? Und hat NEWTON recht?* (Stochastik in der Schule 17(1997 Nr. 3, S. 49-54) von R. Haller wird dargelegt, daß es bei einem von Newton behandelten Wartezeitproblem nicht darauf ankommt, wer zuerst wirft (letzteres glaubte Newton).

Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Warten auf Erfolg in einer Bernoulli-Kette oder dem Warten auf eine vollständige Serie (Coupon-Collector-Problem, Sammlerproblem) erfreuen sich einer ungebrochenen Beliebtheit (Henze (1997), Kapitel 24). In Teil IV seines Aufsatzes *Zog Pepys falsche Schlüsse? Und hat NEWTON recht?* (Stochastik in der Schule (1997) Nr. 3) geht R. Haller von folgendem Auszug eines Briefes von Newton an Pepys (26.11.1693) aus: „Ich nehme an, daß A mit einem Würfel und B mit zweien wirft, der erstere, bis er eine Sechsen wirft, der letztere genausooft um zwei Sechsen, und ich fand, daß A im Vorteil ist. [...] Denn hier ist A deswegen im Vorteil, weil er als erster wirft.“

Haller interpretiert Newtons Text in der Weise, daß „A beginnt und so lange ( $n$ -mal) wirft, bis die erste Sechsen fällt; damit ist  $n$  bestimmt. Nun darf B genausooft wie A werfen, muß aber bei diesen  $n$  Doppelwürfen mindestens zweimal eine Sechsen erzielen. A ist im Vorteil bedeutet für mich: Die Wahrscheinlichkeit, daß B bei diesen durch A festgelegten  $n$  Doppelwürfen keine zweite Sechsen wirft, muß größer als 50% sein.“

Durch Zerlegung nach dem Ereignis „A wirft die erste Sechsen im  $n$ -ten Versuch“ ( $n = 1, 2, \dots$ ) wird dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „A wirft die erste Sechsen, bevor B seine zweite Sechsen wirft“ korrekt zu  $4435/8281 \approx 0,536$  berechnet. Somit ist Spieler A (völlig im Einklang mit Newtons Behauptung) im Vorteil. A ist aber mitnichten im Vorteil, weil er als erster wirft!

Der Schlüssel zum Verständnis dieser Spielsituation liegt darin, daß A und B völlig unabhängig voneinander in getrennten Räumen werfen können. Bezeichnen hierbei die Zufallsvariable  $X$  die Nummer desjenigen Wurfes, welcher die erste

Stochastik in der Schule 18 (1998), Heft 1, S. 2 - 4

Sechsen für A ergibt und  $Y$  die zufällige Nummer desjenigen Doppelwurfes, welcher die zweite Sechsen für B ergibt, so gewinnt A genau dann, wenn das Ereignis  $\{X < Y\}$  eintritt. Dieser Ansatz verdeutlicht, daß B seine Doppelwürfe bis zum Erreichen der zweiten Sechsen schon ausführen kann, bevor A zu werfen beginnt. Dies könnte z.B. unter notarieller Aufsicht an einem anderen Ort geschehen. Entscheidend für den Gewinn von A ist ja nur, ob B mehr Doppelwürfe benötigt (hat) als A Einzelwürfe bis zum Erreichen seiner ersten Sechsen „vorlegt“ (hier sieht man schon, daß A gar nicht „vorlegen“ muß, sondern auch später werfen kann!).

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{X < Y\}$  läßt sich über die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gemäß

$$P(X < Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X < Y | X = n) P(X = n), \quad (1)$$

aber auch durch Bedingen nach den auftretenden Werten für  $Y$  über

$$P(X < Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X < Y | Y = n) P(Y = n), \quad (2)$$

zu

$$P(X < Y) = \frac{4435}{8281} \approx 0,536 \quad (3)$$

berechnen. Die von Haller benutzte Formel (1) suggeriert nur, daß A vorlegt, weil nach dem Auftreten seiner ersten Sechsen bedingt wird. Die für die Anwendung der vermeintlich „B vorlegen lassenden“ Formel (2) benötigte Wahrscheinlichkeit  $P(Y = n)$  ist (vgl. Haller, S. 53)

$$P(Y = n) = \frac{1}{125} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} (22n - 17). \quad (4)$$

Wegen

$$P(X < Y | Y = n) = P(X < n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

bestätigen Einsetzen in (2) und direktes Ausrechnen das Resultat (3). Der von Herrn Haller am Ende seines Aufsatzes gewünschte Nachweis kann also nicht erbracht werden.

In gleicher Weise sind die von Herrn Haller angegebenen Werte  $3205/8281 \approx 0,387$  und  $641/8281 \approx 0,077$  die Wahrscheinlichkeiten  $P(X > Y)$  („B gewinnt“, aber ohne den überflüssigen verwirrenden Zusatz „wenn er beginnt“) bzw.  $P(X = Y)$  („Unentschieden“).

Der Empfehlung eines der beiden Gutachter folgend seien noch die Erwartungswerte  $E(X) = 6$  und  $E(Y) = 756/121 \approx 6,25$  ergänzend hinzugefügt. Dabei ergibt sich  $E(Y)$  entweder aus (4) durch direkte Rechnung (geometrische Reihe sowie deren erste und zweite Ableitung!) oder einfacher über die auch als „Mittelwertsregel“ bekannte und ein Analogon der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit darstellenden Beziehung

$$E(Y) = \sum_{j=0}^2 E(Y|A_j) \cdot P(A_j).$$

Hierbei bezeichnen  $A_j$  das Ereignis, daß im ersten Doppelwurf genau  $j$  Sechsen auftreten und  $E(Y|A_j)$  den Erwartungswert von  $Y$  unter der Bedingung  $A_j$ . Es gelten  $P(A_0) = 25/36$ ,  $P(A_1) = 10/36$  und  $P(A_2) = 1/36$  sowie  $E(Y|A_0) = 1 + E(Y)$ ,  $E(Y|A_2) = 1$  und  $E(Y|A_1) = 1 + 1/p$  mit  $p = 11/36$ , da man nach genau einer Sechse im ersten Doppelwurf auf mindestens eine Sechse in unabhängigen Doppelwürfen wartet.

#### Literatur

HALLER, RUDOLF: Zog Pepys falsche Schlüsse? Und hat NEWTON recht? (Stochastik in der Schule 17 (1997), Nr. 3, 49–54)

HENZE, NORBERT: Stochastik für Einsteiger. Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1997.

#### Adresse des Autors:

Norbert Henze  
 Universität Karlsruhe (TH)  
 Institut für Mathematische Stochastik  
 Englerstraße 2  
 76128 Karlsruhe