Eine elementare Lösung für Pepys' Problem

Norbert Henze, Karlsruhe

Zusammenfassung: Für Pepys' Wartezeitproblem ([1], [2]) sowie für eine von Riehl [4]) betrachtete Variante dieses Problems werden die Gewinnwahrscheinlichkeiten und die Verteilungen der Spieldauern mit elementaren Methoden bestimmt.

1. Einführung

Das Ergebnis eines Würfelwurfes sei mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. $q = 1-p$ ein Treffer (1) bzw. eine Niete (0). In einer *Spielrunde* wirft Spieler A mit einem und *danach* Spieler B gleichzeitig mit zwei Würfeln, wobei alle Würfel identisch gefertigt sind. Das aus unabhängigen Spielrunden bestehende Spiel endet mit dem Sieg desjenigen Spielers, der „zuerst Erfolg hat“ . Dabei besteht ein Erfolg für A darin, einen Treffer zu erzielen; Spieler B benötigt hierfür zweimal einen Treffer. Das Spiel endet unentschieden, falls beide Spieler in derselben Runde Erfolg haben. Haller [1] und Henze [2] untersuchten diese als *Variante 1* bezeichnete Version des Spieles und bestimmten die mit $P(A)$ bezeichnete Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A für den Fall $p = 1/6$ zu $P(A) = 4435/8281 \approx 0.536$.

Durch die Erkenntnis, dass bei dieser Spielvariante A und B ihre Einzel- bzw. Doppelwürfe in getrennten Räumen durchführen können und deshalb die mit X und Y bezeichneten Nummern der Spielrunden, in denen A bzw. B Erfolg haben, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind, wird in [2] ein von Haller bemerktes Paradoxon aufgelöst: es ist egal, ob in jeder Spielrunde zuerst A oder zuerst B wirft. A gewinnt im Fall $X < Y$, B im Fall $X > Y$, und $X = Y$ bedeutet ein Unentschieden.

In [2] werden die Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Spielausgänge im Fall $p = 1/6$ über die Verteilungen von X und Y bestimmt. Riehl [4] modelliert das Problem als Markow-Kette und berechnet die

Stochastik in der Schule **19** (1999), Nr. 1, 30–37.

Gewinnwahrscheinlichkeiten sowie den Erwartungswert der Spieldauer für allgemeines p. Er führt dies auch für eine im Folgenden mit *Variante 2* bezeichnete Version des Spiels durch. Bei dieser Variante ist ein Unentschieden dadurch ausgeschlossen, dass B nicht in derselben Spielrunde „nachziehen" darf. Im Vergleich zu Variante 1 gewinnt A hier also auch im Fall $X = Y$.

Im Folgenden werden sowohl die Gewinnwahrscheinlichkeiten als auch die *Verteilungen* der Spieldauern für beide Varianten des Spiels mit elementaren Methoden bestimmt. Ein dabei verwendetes Grundprinzip stochastischen Denkens besteht darin, ein kompliziertes Ereignis E in einfachere, sich paarweise ausschließende Teilereignisse $E \cap E_1, \ldots, E \cap E_n$ zu zerlegen und die Wahrscheinlichkeiten dieser Teilereignisse gemäß $P(E \cap E_j) = P(E_j) \cdot P(E|E_j)$ über elementare (d.h. aus der konkreten Situation heraus direkt angebbare) bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(E|E_j)$ zu berechnen. Als Resultat ergibt sich die bekannte Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(E) \;=\; \sum_{j=1}^{n} P(E_j) \cdot P(E|E_j).$$

(siehe z.B. [3], Abschnitt 16.7).

2. Spielvariante 1 (Unentschieden möglich)

a) Gewinnwahrscheinlichkeiten

Wir zerlegen das mit A bezeichnete Ereignis „A gewinnt" nach den sechs möglichen Ausgängen $10, 11, 12, 00, 01, 02$ für die erste Spielrunde. Dabei steht ij für das Ergebnis „A und B erzielen i bzw. j Treffer". Die diesen Ergebnissen (in der aufgeführten Reihenfolge) entsprechenden Ereignisse seien mit $C_1, C_2, \ldots, C_6$ bezeichnet. So beschreibt etwa C_5 das Ereignis, dass in der ersten Runde A keinen und B bei seinem Doppelwurf genau einen Treffer erzielt. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(A) \;=\; \sum_{j=1}^{6} P(C_j) \cdot P(A|C_j), \qquad (1)$$

wobei die „unbedingten" Wahrscheinlichkeiten durch $P(C_1) = pq^2$, $P(C_2) = p(1-p^2-q^2) = 2p^2q$, $P(C_3) = p^3$, $P(C_4) = q^3$, $P(C_5) = q(1-p^2-q^2) = 2pq^2$

und $P(C_6) = qp^2$ gegeben sind. Aufgrund der Spielregeln gelten für die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|C_j)$ die Beziehungen $P(A|C_1) = 1 = P(A|C_2)$, $P(A|C_6) = 0$ und $P(A|C_3) = 0$ (im Fall C_3 liegt ein Unentschieden vor!). Ferner gilt $P(A|C_4) = P(A)$, da im Fall C_4 noch keiner der Spieler einen Treffer erzielt hat und somit nach der ersten Runde wieder die Ausgangssituation vorliegt. Zur Bestimmung der noch fehlenden Wahrscheinlichkeit $P(A|C_5)$ betrachten wir zusätzlich die möglichen Ergebnisse ij der *zweiten* Spielrunde. Da B unter der Bedingung C_5 schon in der ersten Runde einen Treffer erzielt hat, gewinnt A jetzt mit Wahrscheinlichkeit eins im Fall 10 und mit der gleichen bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|C_5)$ in dem „nur zeitverlängernden“ Fall 00; in allen anderen Fällen kann A nicht mehr gewinnen. Eine Anwendung der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „A gewinnt“ unter der Bedingung C_5 liefert dann $P(A|C_5) = 1 \cdot pq^2 + P(A|C_5) \cdot q^3$ und somit $P(A|C_5) = pq^2/(1-q^3)$. Einsetzen in (1) und Auflösen der entstehenden Gleichung nach $P(A)$ ergibt jetzt ohne Mühe

$$P(A) \;=\; \frac{p(1-p^2-q^5)}{(1-q^3)^2} \tag{2}$$

und somit das bekannte Resultat $P(A) = 4435/8281 \approx 0.536$ im Fall $p = 1/6$.

Analog ergibt sich die Gewinnwahrscheinlichkeit $P(B)$ für B aus den Beziehungen $P(B|C_1) = P(B|C_2) = P(B|C_3) = 0$, $P(B|C_4) = P(B)$, $P(B|C_6) = 1$ und $P(B|C_5) = 1 \cdot q(1-q^2) + P(B|C_5) \cdot q^3$, also $P(B|C_5) = q(1-q^2)/(1-q^3)$. Die Bestimmungsgleichung für $P(B|C_5)$ folgt dabei aus der Zerlegung der Ergebnisse der *zweiten* Runde nach den Möglichkeiten „A hat keinen und B mindestens einen Treffer“ und „weder A noch B erzielen einen Treffer“ (bei den anderen Möglichkeiten kann B nicht mehr gewinnen). Mit Hilfe von (1) erhält man jetzt leicht

$$P(B) \;=\; \frac{q(p^3+q-2q^3+q^5)}{(1-q^3)^2}, \tag{3}$$

also insbesondere $P(B) = 3205/8281 \approx 0.387$ im Fall $p = 1/6$. Die Wahrscheinlichkeit $P(U)$ für ein Unentschieden ist dann

$$P(U) \;=\; 1 - P(A) - P(B) \;=\; \frac{p^3(1-q^3)+2p^2q^2(1-q^2)}{(1-q^3)^2}; \tag{4}$$

dieser Fall tritt für $p = 1/6$ mit der Wahrscheinlichkeit $641/8281 \approx 0.077$ ein.

b) Verteilung der Spieldauer

Die Zufallsvariable T $(= \min(X, Y))$ bezeichne die Anzahl der Runden bis zum Spielende. Da das Ereignis $\{T \geq k\}$ gleichbedeutend damit ist, dass Spieler A in den ersten $k-1$ Würfen keinen und B in seinen ersten $k-1$ Doppelwürfen höchstens einen Treffer erzielt, folgt für $k \geq 2$

$$\begin{aligned} P(T \geq k) &= q^{k-1} \cdot (q^{2(k-1)} + (k-1)q^{2(k-2)}2pq) \\ &= q^{3(k-1)} + 2(k-1)pq^{3k-4} \end{aligned} \tag{5}$$

und somit wegen $P(T \geq 1) = 1$ und $P(T = k) = P(T \geq k) - P(T \geq k+1)$ die Verteilung von T durch Differenzbildung. Wegen $P(T \leq 8) = 1 - P(T \geq 9) = 1 - 0.0528\ldots = 0.947\ldots$ für $p = 1/6$ folgt aus (5), dass das Spiel in diesem Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95% nach höchstens acht Runden beendet ist. Der Erwartungswert von T lässt sich zum einen aus der Verteilung gemäß

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} j\, P(T=j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} 1 \right) P(T=j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} P(T=j) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{3(k-1)} + 2pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) q^{3(k-2)} = \frac{1}{1-q^3} + \frac{2pq^2}{(1-q^3)^2} \end{aligned}$$

unter Beachtung von

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot x^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{6}$$

für $|x| < 1$ (geometrische Reihe und ihre erste Ableitung) zu

$$E(T) = \frac{1 - q^3 + 2pq^2}{(1-q^3)^2} \tag{7}$$

berechnen, was im Spezialfall $p = 1/6$ das Resultat $E(T) = 30456/8281 \approx 3.678$ liefert. Eine alternative Methode (welche jedoch nicht die Verteilung von T liefert) besteht darin, $E(T)$ als gewichtetes Mittel

$$E(T) = \sum_{j=1}^{6} E(T|C_j) \cdot P(C_j) \tag{8}$$

auszudrücken (vgl. die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit). Dabei ist $E(T|C_j)$ der Erwartungswert von T unter der Annahme, dass das Spiel in der ersten Runde mit dem Ausgang ij startet. Da in den Fällen C_1, C_2, C_3 und C_6 der Ausgang des Spieles nach der ersten Runde feststeht, gilt $E(T|C_1) = E(T|C_2) = E(T|C_3) = E(T|C_6) = 1$. Weiter folgt $E(T|C_4) = 1 + E(T)$, da sich im Fall C_4 die Situation nach der ersten Runde wie zu Beginn darstellt. Im Fall C_5 (B hat jetzt bereits einen Treffer) endet das Spiel nach der zweiten Runde, wenn in den insgesamt drei Würfen der zweiten Runde mindestens ein Treffer erzielt wird (die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $1-q^3$). Falls kein Treffer auftritt, so stellt sich die Situation nach der zweiten Runde wie nach der ersten Runde dar. Diese Überlegungen liefern die zu (8) analoge Darstellung

$$E(T|C_5) \;=\; 2 \cdot (1-q^3) \;+\; (1+E(T|C_5)) \cdot q^3$$

und somit $E(T|C_5) = (2-q^3)/(1-q^3)$. Einsetzen in (8) und Auflösen nach $E(T)$ bestätigen dann das Resultat (7).

3. Spielvariante 2 (Unentschieden ausgeschlossen)

In dieser Spielvariante hängen sowohl die Gewinnwahrscheinlichkeiten als auch die Dauer des Spieles davon ab, wer in jeder Spielrunde zuerst würfelt.

a) A würfelt zuerst

Wenn A vor B würfelt, kommen ihm die in Variante 1 als Unentschieden gewerteten Ausgänge zusätzlich zugute, so dass seine Gewinnwahrscheinlichkeit die Summe der in (2) und (4) aufgeführten Werte ($= P(X \leq Y)$) ist. Durch Zusammenfassen ergibt sich

$$P(A) \;=\; \frac{p(1-3q^3+2q^2)}{(1-q^3)^2}, \tag{9}$$

also insbesondere $P(A) = 5076/8281 \approx 0.613$ im Fall $p = 1/6$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für B ist unverändert durch den Ausdruck (3) gegeben.

Die mit T^* bezeichnete Dauer des Spieles ist im Unterschied zu Variante 1 die *Anzahl durchgeführter Einzelwürfe von* A *und Doppelwürfe von* B. Zur Bestimmung der Verteilung von T^* untersuchen wir wieder die Überschreitungswahrscheinlichkeit $P(T^* \geq k)$ und unterscheiden hierzu die beiden

Fälle $k = 2s$ ($s \geq 1$) und $k = 2s+1$ ($s \geq 1$). Das Ereignis $\{T^* \geq 2s\}$ ist äquivalent dazu, dass A in den ersten s Würfen keinen und B in seinen ersten $s-1$ Doppelwürfen höchstens einen Treffer erzielt, und somit folgt

$$P(T^* \geq 2s) \;=\; q^s \cdot (q^{2(s-1)} \;+\; 2(s-1)pq \cdot q^{2(s-2)}). \tag{10}$$

In gleicher Weise gilt

$$P(T^* \geq 2s+1) \;=\; q^s \cdot (q^{2s} \;+\; 2spq \cdot q^{2(s-1)}), \tag{11}$$

so dass man die Verteilung $P(T^* = k)$ von T^* durch Differenzbildung erhält. Mit (6) folgt weiter

$$\begin{aligned} E(T^*) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T^* \geq k) = \sum_{s=1}^{\infty} P(T^* \geq 2s) + \sum_{s=0}^{\infty} P(T^* \geq 2s+1) \\ &= \ldots = \frac{(1+q)(1-q^3+2pq^2)}{(1-q^3)^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

insbesondere also $E(T^*) = 55836/8281 \approx 6.743$ im Fall $p = 1/6$.

Auch hier kann der Erwartungswert alternativ als gewichtetes Mittel

$$E(T^*) \;=\; \sum_{j=1}^{4} E(T^*|D_j) \cdot P(D_j) \tag{13}$$

erhalten werden. Dabei bezeichnen D_1 das Ereignis „A erzielt im ersten Versuch einen Treffer“ und D_2, D_3 und D_4 die Ereignisse, dass die erste Spielrunde (im Sinne von Variante 1) die Ergebnisse 00 bzw. 01 bzw. 02 besitzt. Aus der Spielregel folgt $E(T^*|D_1) = 1$, $E(T^*|D_2) = 2 + E(T^*)$ und $E(T^*|D_4) = 2$. Zur Bestimmung von $E(T^*|D_3)$ ziehen wir die Ergebnisse der nächsten Würfe von A und B heran. Eine Zerlegung nach den Möglichkeiten „A erzielt einen Treffer“, „A und B erzielen keinen Treffer“ und „A erzielt keinen und B mindestens einen Treffer“ liefert (analog zu (8)) $E(T^*|D_3) = 3 \cdot p + (2 + E(T^*|D_3)) \cdot q^3 + 4 \cdot q(1-q^2)$. Hieraus ergibt sich $E(T^*|D_3)$ und zusammen mit $P(D_1) = p$, $P(D_2) = q^3$, $P(D_3) = 2pq^2$ und $P(D_4) = qp^2$ durch Einsetzen in (13) und Auflösen nach $E(T^*)$ das Resultat (12).

b) B würfelt zuerst

Würfelt B vor A, so werden die in Variante 1 als Unentschieden gewerteten Ausgänge als für B gewonnen angesehen. Folglich ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für B die Summe der in (3) und (4) aufgeführten Werte

$(= P(Y \leq X))$, also

$$P(B) \;=\; \frac{p^2(1 + 2q^2 + q^3)}{(1 - q^3)^2}. \tag{14}$$

Insbesondere folgt $P(B) = 3846/8281 \approx 0.464$ im Fall $p = 1/6$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für A ist der in (2) gegebene Ausdruck.

Für die zufällige Spieldauer T^* (Anzahl der insgesamt durchgeführten Einzel- und Doppelwürfe) folgt analog zu (10) und (11)

$$P(T^* \geq 2s) \;=\; q^{s-1} \cdot (q^{2s} \;+\; 2spq \cdot q^{2(s-1)})$$

$(s \geq 1)$ sowie

$$P(T^* \geq 2s + 1) \;=\; q^s \cdot (q^{2s} \;+\; 2spq \cdot q^{2(s-1)})$$

$(s \geq 0)$ und hieraus (oder wie früher über eine zu (13) analoge Formel)

$$E(T^*) \;=\; \frac{1 + 2q + q^2 - 3q^3 - q^5}{(1 - q^3)^2}.$$

Wegen $E(T^*) = 57066/8281 \approx 6.891$ im Fall $p = 1/6$ ist das Spiel also im Mittel etwas länger, verglichen mit dem Fall, dass A vor B wirft ($E(T^*) \approx 6.743$). Zählt man in Variante 1 nicht die Spielrunden, sondern die Anzahl der Würfe von A und Doppelwürfe von B, so ist der dort berechnete Erwartungswert zu verdoppeln, so dass der Erwartungswert der Anzahl dieser Würfe in Variante 1 approximativ gleich 7.356 ist. Wie bereits von Riehl [4] bemerkt, wird also durch den Ausschluss des unentschiedenen Spielausgangs das Spiel in beiden Versionen von Variante 2 gegenüber Variante 1 im Durchschnitt um einen „halben Wurf“ kürzer.

4. Schlussbemerkung

Variante 1 des Spieles bietet beiden Spielern nur im trivialen Fall $p = 1$ gleiche Gewinnchancen (für $p < 1$ hat A eine größere Gewinnwahrscheinlichkeit als B). Falls A beginnt, ist B in Variante 2 stets im Nachteil. Wie Riehl [4] bemerkt, gibt es jedoch in Variante 2 für den Fall, dass B vor A würfelt, einen Wert von p „knapp unter 0.4“, so dass beide Spieler die Gewinnwahrscheinlichkeit $1/2$ besitzen. Setzt man den in (14) stehenden

Ausdruck gleich 1/2, so entsteht nach Hochmultiplizieren der Nenner und Zusammenfassen die Bestimmungsgleichung $q^6 - 2q^5 + 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1 = 0$, welche zu $(q-1)^2(q^4 - (q-1)^2) = 0$ äquivalent ist. Aus $q^4 = (q-1)^2$ ergibt sich nach Bildung der Quadratwurzel aus den resultierenden beiden quadratischen Gleichungen die einzige Lösung q im Intervall $(0,1)$ zu $q = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ und somit $p = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.382$.

Literatur

[1] *Haller, R.* (1997). Zog Pepys falsche Schlüsse? Und hat Newton recht? *Stochastik in der Schule* **17**, 3–6.

[2] *Henze, N.* (1998). Die Auflösung eines Wartezeit-Paradoxons – oder – Newton hatte nur teilweise recht! *Stochastik in der Schule* **18**, 2–4.

[3] *Henze, N.* (1998). Stochastik für Einsteiger. 2. Auflage. Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

[4] *Riehl, G.* (1999). Pepys' Problem – anders interpretiert und anders gelöst. *Stochastik in der Schule* **19** Nr. 1, 20–29.

Prof. Dr. Norbert Henze
Universität Karlsruhe
Institut für Mathematische Stochastik
Englerstr. 2, 76128 Karlsruhe
Email: Norbert.Henze@math.uni-karlsruhe.de

lungen formulieren sollten