

Das Kugel-Fächer-Modell - Arbeitsblätter für den Unterricht

Heinz Klaus Strick, Leverkusen

In (Strick 1994) wurde dargestellt, wie Aufgaben vom Typ „Geburtstagsproblem“, „Rosinenproblem“, „Problem der vollständigen Serie“ bzw. „Rencontreproblem“ im Unterricht behandelt werden können. Bei allen Aufgabentypen wird das gleiche mathematische Modell verwendet.

Beispiel:

- Klassische Einkleidung des Geburtstagsproblems
k Personen werden zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter den k Personen mindestens zwei gibt, die am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Verallgemeinerung des Geburtstagsproblems
k Kugeln werden zufällig auf f Fächer verteilt; k ist klein im Vergleich zu f.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter den f Fächern mindestens eines gibt, in dem mindestens zwei Kugeln liegen?

Ausgehend von der Behandlung der „klassischen“ Einkleidungen geht es zunächst darum, gleichartig strukturierte Aufgaben zu lösen, dann aber bald um die Vermittlung von „Lösungs-Routine“ im Umgang mit verschiedenartigen Einkleidungen: Schülerinnen und Schüler sollen die – im Laufe ihrer Schullaufbahn entstandenen – Ängste vor Textaufgaben verlieren, indem sie selbst Textaufgaben entwerfen.

Erfahrungsgemäß gelingt es über diese Methode, die Schüler/innen aus einer passiven Haltung herauszureißen und sie stärker als gewohnt in das Unterrichtsgeschehen einzubinden; das „Spielen“ mit dem Modell macht den Schülern/innen sogar Spaß. Nach dieser Phase eigenständigen Arbeitens sind viele sicherer geworden; sie haben „erlebt“, dass sie die Sache verstanden haben und trauen sich insgesamt mehr zu als bisher.

Im Laufe der Jahre sammelt sich beim unterrichtenden Lehrer eine beachtliche Reihe von möglichen Einkleidungen an, die ständig – z.B. durch Zeitungsnachrichten, vgl. (Strick 1999) – erweitert wird. Aus Zeitgründen sah ich mich im vergangenen Jahr bei der Planung des Unterrichts eines Kurses gezwungen, mein Vorgehen in der Weise zu beschleunigen, dass ich Einkleidungen und Stichwörter vorgab, zu denen meine Schülerinnen und Schüler selbst Fragestellungen formulieren sollten.

Um mir eine längere Einführung zu ersparen, verteilte ich also das Arbeitsblatt Nr. 1 (S. 43), auf dem abwechselnd verschiedene Einkleidungen des Geburtstags- bzw. des Rosinenproblems ausgeführt waren bzw. ergänzt werden sollten. Wie sich in der Praxis zeigte, eignet sich dieses Arbeitsblatt für Partner- oder

Gruppenarbeit, da die vorgegebenen Beispiele genügend Gesprächsanlässe für die gemeinsame Bearbeitung der „offenen“ Felder ergeben. Nach Abschluss der Bearbeitung wurden die einzelnen Varianten vorgetragen und miteinander verglichen.

Eine mögliche Lösungsformulierung ist Arbeitsblatt Nr. 1A (S. 40) zu entnehmen, das Grundlage für Arbeitsblatt Nr. 2 (S. 44) wurde.

Hier geht es um die Bewältigung von so „schrecklich kompliziert“ klingenden Fragestellungen der folgenden Art:

- Gesucht wird ein Kind an einer Schule, das am 25. Februar Geburtstag hat. Wie viele Kinder muss man mindestens auswählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Kind darunter ist, das am 25. Februar geboren ist?

Dieser Aufgabentyp, der wegen der dreifachen Verwendung des Worts „mindestens“ im Aufgabentext bei den Schülern/innen „Dreimal-mindestens-Aufgabe“ heißt, ist im Prinzip einfach zu lösen; der kompliziert wirkende Text schreckt viele von der Bearbeitung ab. Das eigenständige Formulieren von solch komplizierten Aufgabentexten entspannt die Situation und lässt auch solche Fragestellungen zu Routineaufgaben werden.

Auch das Arbeitsblatt Nr. 2 eignet sich für die Partner- oder Gruppenarbeit; eine „Muster“-Lösung ist auf Blatt Nr. 2A (S. 41) beigelegt.

Dass sich der Einsatz der beiden Arbeitsblätter bewährt hat, zeigte sich sowohl in den nachfolgenden Klausuren wie auch in den Abiturprüfungen, in denen keine® der Schüler/innen ernsthafte Schwierigkeiten mit den Einkleidungen hatte.

Wie in (Strick 1994) ausgeführt, kann man sich in analoger Weise auch mit dem „Problem der vollständigen Serie“ wie auch dem „Rencontreproblem“ beschäftigen. Diesem Beitrag ist auch noch ein Arbeitsblatt Nr. 3 (S. 45) beigelegt (sowie die Musterlösung Arbeitsblatt Nr. 3A (S. 42) und ein Muster für alle vier Einkleidungstypen Nr. 4 (S. 43)).

Diese Arbeitsblätter können z.B. in einem Leistungskurs eingesetzt werden; der Autor hat ähnlich positive Erfahrungen wie mit den Arbeitsblättern Nr. 1 und Nr. 2 mit Studenten/innen im Rahmen eines Didaktikseminars gemacht.

Literatur

- Strick, H.K. (1994): Modellieren als Aufgabe des Stochastikunterrichts. - In: Praxis der Mathematik 36, Heft 2.
- Strick, H.K. (1990): Mathematik heute - Grundkurs Stochastik (Hg. Griesel, H. / Postel, H.). - Hannover: Schroedel Verlag
- Strick, H.K. (1998): Einführung in die Beurteilende Statistik - Neubearbeitung. - Hannover: Schroedel Verlag
- Strick, H.K. (1999): Stochastik aus der Zeitung. - In: MNU 52.

Arbeitsblatt Nr. 1 A (Musterlösungen)

Stichwort	Einkleidung des Geburtstagsproblems	Einkleidung des Rosinenproblems
Geburtstage	23 Personen werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei davon am gleichen Tag Geburtstag haben?	An einer Schule sind 800 Schülerinnen und Schüler. Wie groß ist der Anteil der Tage eines Jahres, an denen keines der Kinder Geburtstag hat?
Rosinen	20 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Rosinenbrötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mindestens einem Rosinenbrötchen zwei oder mehr Rosinen sind?	100 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Rosinenbrötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Rosinenbrötchen mindestens keine Rosine ist?
Preisverlosung	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 10 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler mehr als einen Preis erhält?	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie groß ist der Anteil derer, die leer ausgehen?
Würfeln	Ein Würfel wird 4mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine der Augenzahlen mehr als einmal auf?	Ein Würfel wird 10mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sechs noch nicht gefallen?
Roulette	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 10 Runden des Roulettespiels auf einem der Felder wiederholt liegen bleibt?	Wie groß ist der Anteil der Felder beim Roulettespiel, auf denen nach 100 Spielrunden die Kugel noch nicht liegen geblieben ist?
Sammelbilder	Zu einer Serie von Sammelbilder gehören 40 verschiedene Motive. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 5 Packungen mindestens ein Bild doppelt hat?	Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 40 verschiedene Motive. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 100 Packungen ein bestimmtes Bild immer noch nicht hat?
Druckfehler	In einem Buch von 100 Seiten sind 50 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf irgendeiner Seite mehr als ein Druckfehler ist?	In einem Buch von 100 Seiten sind 200 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden. Wie groß ist der Anteil der druckfehlerfreien Seiten?
Enten	5 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig voneinander auf 20 aufsteigende Enten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Enten abgeschossen werden?	15 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 10 aufsteigende Enten. Wie viele Enten werden etwa überleben?

Arbeitsblatt Nr. 2A (Musterlösungen)

Stichwort	Einkleidung des Rosinenproblems	Dreimal mindestens
Geburts- tage	An einer Schule sind 800 Schülerinnen und Schüler. Wie groß ist der Anteil der Tage eines Jahres, an denen keines der Kinder Geburtstag hat?	Gesucht wird ein Kind an einer Schule, das am 25. Februar Geburtstag hat. Wie viele Kinder muss man mindestens auswählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Kind darunter ist, das am 25. Februar geboren ist?
Rosinen	100 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Rosinenbrötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Brötchen mindestens eine Rosine ist?	Wie viele Rosinen muss ein Bäcker mindestens in einen Teig von 50 Rosinenbrötchen einkneten, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem beliebigen Brötchen tatsächlich mindestens eine Rosine enthalten ist, mindestens 99% beträgt?
Preis- verlosung	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie groß ist der Anteil derer, die leer ausgehen?	In einer Klasse mit 25 Schülern werden Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie viele Preise müssen mindestens zur Verfügung stehen, damit auch Fritzchen mindestens einen Preis erhält (mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%).
Würfeln	Ein Würfel wird 10mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sechs noch nicht gefallen?	Ein Würfel wird geworfen. Wie viele Würfe müssen mindestens durchgeführt werden, damit Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal gefallen ist?
Roulette	Wie groß ist der Anteil der Felder beim Roulette-spiel, auf denen nach 100 Spielrunden die Kugel noch nicht liegen geblieben ist?	Wie viele Runden muss man beim Roulette mindestens spielen, damit die Kugel mindestens einmal auf Feld Nr. 0 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% stehen geblieben ist?
Sammel- bilder	Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 40 verschiedene Motive. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 100 Packungen ein bestimmtes Bild immer noch nicht hat?	Sammelbilder werden zufällig auf Kaugummipackungen verteilt. Angenommen, zu einer Serie gehören 40 Bilder. Wie viele Packungen muss man mindestens kaufen, damit auch Bild Nr. 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal vorhanden ist?
Druck- fehler	In einem Buch von 100 Seiten sind 200 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden. Wie groß ist der Anteil der druckfehlerfreien Seiten?	In einem Buch sind 200 Seiten. Wie viele (zufällig über das Buch verteilte) Druckfehler müssten mindestens enthalten sein, damit auf einer beliebig von mir ausgewählten Seite mindestens ein Druckfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% enthalten ist?
Enten	15 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 10 aufsteigende Enten. Wie viele Enten werden etwa überleben?	Wie viele sichere Jäger müssen mindestens gleichzeitig und unabhängig voneinander auf 10 aufsteigende Enten schießen, damit auch eine ganz bestimmte Ente mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal getroffen wird?

Arbeitsblatt Nr. 3A (Musterlösungen)

Stichwort	Einkleidung Sammelbilderproblem	Einkleidung Rencontre
Geburts-tage	3000 Personen kommen zu einem Fußballspiel. Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den Zuschauern für jeden Tag des Jahres ein Geburtstagskind gibt?	Zu einem Fest werden 365 Personen eingeladen, die an lauter verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt mindestens eine Person, die am i-ten Tag des Jahres Geburtstag hat, als i-te beim Fest an?
Rosinen	In den Teig für 50 Rosinenbrötchen werden 500 Rosinen eingeknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Rosinenbrötchen mindestens eine Rosine ist?	?
Preisverlosung	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades mit 25 Sektoren verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder mindestens einen Preis gewinnt?	In einer Klasse mit 25 Schülern werden nacheinander 25 Preise verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Schüler dabei ist, der an Platz i der Klassenliste steht und als i-ter ausgelost wird?
Würfeln	Ein Würfel wird 10 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede der Augenzahlen mindestens einmal auftreten?	Ein Würfel wird solange geworfen, bis jede Zahl mindestens einmal gefallen ist; dabei sollen die 'überflüssigen' Würfe nicht gezählt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Augenzahlen von 1 bzw. 2. bzw. ...6 beim 1. bzw. 2. bzw. ... 6. Wurf fällt?
Roulette	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 100 Runden des Roulettespiels auf jedem der 37 möglichen Felder mindestens einmal stehen bleiben wird?	analog zu Würfeln
Sammelbilder	Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 20 Sammelbilder, die bestimmten Packungen beigelegt sind. Jemand kauft 30 Packungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine vollständige Serie vor?	Jemand hat eine komplette Serie von Sammelbildern von 20 Sammelbildern. Diese sind noch nicht sortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Bilder schon an der richtigen Stelle liegt?
Druckfehler	In einem Buch mit 100 Seiten sind 300 Druckfehler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf jeder Seite mindestens ein Druckfehler ist?	?
Enten	30 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 10 aufsteigende Enten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Ente von mindestens einer Kugel getroffen wird?	?

Arbeitsblatt Nr. 4 (Muster)

Einkleidung Sammelbilderproblem	Einkleidung Rencontre
Aus einem Skat-Kartenspiel werden nacheinander Karten gezogen und wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 100 Ziehungen jede der 32 Karten mindestens einmal gezogen wurde?	Aus zwei umgedrehten gemischten Skatkarten-Stapeln wird nacheinander gleichzeitig je eine Karte abgehoben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Abheben der Karten mindestens einmal zwei gleiche Karten abgehoben werden?
Einkleidung Geburtstagsproblem	Einkleidung Rosinenproblem
Aus einem Skat-Kartenspiel werden nacheinander 10 Karten gezogen und wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte mindestens zweimal gezogen wird?	Aus einem Skat-Kartenspiel werden nacheinander 50 Karten gezogen und wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Karte noch nicht gezogen ist?

Arbeitsblatt Nr. 1 (Aus drucktechnischen Gründen überlappen sich die Spalten.)

Stichwort	Einkleidung des Geburtstagsproblems	Einkleidung des Rosinenproblems
Geburts- tage	23 Personen werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei davon am gleichen Tag Geburtstag haben?	
Rosinen		100 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Rosinenbrötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Rosinenbrötchen mindestens keine Rosine ist?
Preis- verlosung	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 10 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler mehr als einen Preis erhält?	
Würfeln		Ein Würfel wird 10mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sechs noch nicht gefallen?
Roulette	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 10 Runden des Roulettespiels auf einem der Felder wiederholt liegen bleibt?	
Sammel- bilder		Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 40 verschiedene Motive. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 100 Packungen ein bestimmtes Bild immer noch nicht hat?
Druck- fehler	In einem Buch von 100 Seiten findet man 50 Druckfehler zufällig verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf irgendeiner Seite mehr als ein Druckfehler ist?	
Enten		15 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 10 aufsteigende Enten. Wie viele Enten werden etwa überleben?

Arbeitsblatt Nr. 2

Stichwort	Einkleidung des Rosinenproblems	Dreimal mindestens
Geburtstage	An einer Schule sind 800 Schülerinnen und Schüler. Wie groß ist der Anteil der Tage eines Jahres, an denen keines der Kinder Geburtstag hat?	Gesucht wird ein Kind an einer Schule, das am 25. Februar Geburtstag hat. Wie viele Kinder muss man mindestens auswählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Kind darunter ist, das am 25. Februar geboren ist?
Rosinen	100 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Rosinenbrötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Rosinenbrötchen mindestens eine Rosine ist?	
Preisverlosung	In einer Klasse mit 25 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost. Wie groß ist der Anteil derer, die leer ausgehen?	
Würfeln	Ein Würfel wird 10mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sechs noch nicht gefallen?	
Roulette	Wie groß ist der Anteil der Felder beim Roulettespiel, auf denen nach 100 Spielrunden die Kugel noch nicht liegen geblieben ist?	
Sammelbilder	Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 40 verschiedene Motive. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 100 Packungen ein bestimmtes Bild immer noch nicht hat?	
Druckfehler	In einem Buch von 100 Seiten sind 200 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden. Wie groß ist der Anteil der druckfehlerfreien Seiten?	
Enten	15 sichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 10 aufsteigende Enten. Wie viele Enten werden etwa überleben?	

Arbeitsblatt Nr. 3

Stichwort	Einkleidung Sammelbilderproblem	Einkleidung Rencontre
Geburtstage	3000 Personen kommen zu einem Fußballspiel. Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den Zuschauern für jeden Tag des Jahres ein Geburtstagskind gibt?	Zu einem Fest werden 365 Personen eingeladen, die an lauter verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt mindestens eine Person, die am i -ten Tag des Jahres Geburtstag hat, als i -te beim Fest an?
Rosinen		
Preisverlosung		
Würfeln		
Roulette		
Sammelbilder		
Druckfehler		
Enten		

Anschrift des Verfassers

Heinz Klaus Strick
Pastor-Scheibler-Str. 10
51381 Leverkusen

e-Mail: strick.lev@t-online.de