

Ein konstruktivistischer Zugang zu Permutationen und Kombinationen

von Robert J. Quinn und Lyndia R. Wiest¹

übersetzt und bearbeitet von Gerhard König

Zusammenfassung: Es wird ein Unterrichtsgang beschrieben, in dem die Schüler ihre Kenntnisse über Permutationen und Kombinationen durch Problemlösen gewinnen. Die Schüler bearbeiten eine Anwendungsaufgabe und entwickeln dabei ein konzeptionelles Verständnis.

Einleitung

Wie werden Elemente der Kombinatorik im Unterricht behandelt? Meist so, daß Schüler die zugehörigen Formeln auswendig lernen und dann Grundaufgaben zum Lösen gestellt bekommen. Auf diese Art und Weise sind Schüler zwar in kurz darauf folgenden Klassenarbeiten erfolgreich, aber ihnen fehlt ein tieferes Verständnis. Der hier vorgestellte Unterrichtsgang hingegen gibt Schülern Gelegenheit, Permutationen und Kombinationen in Anwendungssituationen kennenzulernen und zu erforschen und so die dahinterstehenden Begriffsbildungen zu verstehen. Wir werden die beiden wichtigen Begriffe der Kombinatorik, Permutationen und Kombinationen, an einem Leitbeispiel erarbeiten, nämlich an der folgenden Aufgabe (Problemsituation).

Die Problemsituation

Es werden Gruppen von je vier Schülern gebildet. Jede Gruppe erhält die folgende Aufgabe:

John renoviert sein Haus und muß dabei drei Gästezimmer tapezieren. Er hat vier Tapetenmuster. Wenn er sich bei einem Raum für ein Tapetenmuster entschieden hat, dann muß der gesamte Raum damit tapeziert werden. Auf wie viele verschiedene Arten kann John seine Gästezimmer renovieren?

Einige Gruppen werden sofort fragen, ob *ein* Tapetenmuster auch für alle drei Räume benutzt werden kann. Ihnen wird geantwortet, das sollten sie selber entscheiden. Die Gruppen werden aufgefordert, eine Lösung für dieses Problem zu erarbeiten und diese dann mit Begründungen in der Klasse vorzustellen. Folgende Lösungsantworten waren die häufigsten: 64, 24 und 4.

¹ Übersetzung aus Teaching Statistics v.20(Autumn 1998)3, S.75-76

Begründung der Lösungen

Die verschiedenen Gruppen erläutern im nächsten Schritt hintereinander ihre Antworten. Eine Gruppe, die der Meinung ist, daß John 24 Möglichkeiten hätte, seine drei Räume zu tapezieren, werden gebeten, mit der Vorstellung der Lösungen zu beginnen. Ein Mitglied dieser Gruppe erläutert, daß nach ihrer Meinung John für alle drei Räumlichkeiten verschiedene Tapetenmuster benutzen sollte. Die Räume seien zudem wohlunterschieden. Für den ersten Raum hat John vier verschiedene Möglichkeiten der Auswahl. Ist ein Tapetenmuster ausgewählt, dann blieben für den zweiten Raum noch drei verschiedene Muster und für den dritten Raum nur noch deren zwei. So gäbe es $4 \times 3 \times 2$ Möglichkeiten, die drei Räume unter diesen Bedingungen zu tapezieren. Zur Visualisierung dieser Lösungsmöglichkeit kann zusätzlich ein Baumdiagramm benutzt werden.

Danach stellt eine Gruppe mit der Lösungsantwort 64 ihre Lösung vor. Die Gruppenmitglieder erklärten, sie sähen nicht ein, warum John nicht dasselbe Muster in zwei Zimmern oder sogar in allen drei verwenden dürfte. Also könnten seine drei Zimmer auf $4 \times 4 \times 4$ verschiedene Möglichkeiten tapeziert werden. Jedes Tapetenmuster könnte nämlich für jeden Raum benutzt werden.

Schließlich mußte eine Gruppe, die die Lösung 4 hatte, argumentieren. Sie stimmte mit der ersten Gruppe überein, daß ein Tapetenmuster nicht für verschiedenen Zimmer benutzt werden sollte. Sie unterschied aber nicht die einzelnen Räumlichkeiten. Für diese Gruppen war die entscheidende Frage, auf wieviel verschiedenen Arten man drei Muster aus den vier verschiedenen Tapeten auswählen könne. Unter ihren Voraussetzungen war das Tapezieren von Raum 1 mit Tapete A, von Raum 2 mit Tapete B, sowie Raum 3 mit Tapete C das Gleiche wie das Tapezieren von Raum 1 mit Tapete B, Raum 2 mit Tapete C und Raum 3 mit Tapete A. Die von dieser Gruppe bevorzugte Lösung kann auf verschiedenen Weisen erklärt werden. Die gebräuchlichste Erklärung beruhte auf das Aufzählen aller verschiedenen Möglichkeiten: ABC, ABD, ACD, BCD. Ein Schüler, der etwas mehr durchblickte, argumentierte, daß jede Auswahl von drei Tapeten aus vier das Nichtbenutzen einer Tapete bedeutete. Da es vier Möglichkeiten gäbe, ein Muster auszulassen, gibt es auch vier Möglichkeiten, drei dieser Muster zu verwenden. Jede der obigen Gruppierungen von je dreien entsteht durch das Weglassen von D, C, B oder A.

Permutationen

Nun wird die mathematische Terminologie eingeführt. Den Schülern wird erklärt, daß die Schüler mit der Lösung 24 sog. *Permutationen* benutzt hätten. Jede Gruppe entwickelt eine informelle Definition für den neuen Begriff und stellt ihn zur Diskussion. Die Diskussion in der Klasse endet mit einer Arbeitsdefinition etwa so, daß eine Permutation eine geordnete Anordnung einer Teilmenge von m Elementen aus einer Menge von n Elementen ist.

Diese Definition wird nun in ähnlichen Aufgaben benutzt und mit einer Bezeichnung abgekürzt, etwa 4P_3 oder $P(4,3)$. Auf wieviel verschiedenen Arten können drei Zimmer tapeziert werden, wenn 10 Muster zur Verfügung stehen? Die meisten Schüler wissen die Antwort: $P(10,3) = 10 \times 9 \times 8 = {}^{10}P_3$. Nach mehreren solcher Übungen kann ein Freiwilliger erklären, wie ${}^{12}P_4 = P(12,4)$ berechnet wird. Der Schüler kann erklären, daß man bei der 12 beginne und mit vier jeweils um 1 erniedrigte Faktoren multipliziere. Da solche Produkte in der abzählenden Kombinatorik häufig sind, hat man dafür ein besonderes Zeichen eingeführt:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1.$$

Das Zeichen $n!$ wird n Fakultät gelesen. Nach der Einführung der Fakultät kann gefolgert werden, daß ${}^{12}P_4 = P(12,4) = 12!/8!$ ist. Nach mehreren Beispielen kann die allgemeine Formel formuliert werden.

Kombinationen

Den Schülern wird erklärt, daß ihre Mitschüler mit der 4 als Lösung *Kombinationen* benutzt hätten. Das gebräuchliche Symbol für unser spezielles Problem sei

$\binom{4}{3}$. Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen Permutationen und Kombi-

nationen? Die Schüler müssen beim Entdecken von ${}^4P_3/6 = P(4,3)/6 = \binom{4}{3}$ unter-

stützt werden. Die eine Hälfte der Klasse wird aufgefordert, die 24 Permutationen aufzuschreiben, die den verschiedenen Möglichkeiten der Raumentapezierungen entsprechen; sie sollen dabei die ABCD-Notation verwenden. Die andere Hälfte der Klasse betrachtet eine der vier Kombinationen für die Tapezierung der Räume. Ihre Aufgabe ist, nun zu bestimmen, wieviel verschiedene Anordnungen für diese spezielle Kombination möglich sind. Die erste Hälfte der Klasse kommt zu dem Resultat, daß die 24 Permutationen in vier Gruppen zu je

sechs Elementen sortiert werden können. Jede Gruppe entspricht einer Kombination. Die andere Klassenhälfte findet heraus, daß jede Kombination sechs Anordnungen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entspricht, d.h. Permutationen. Die drei ausgewählten Tapetenmuster A, B und C lassen sich zum Beispiel wie folgt verschieden anordnen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Auf diese Art und Weise sollen beide Arbeitsgruppen erkennen, daß die Anzahl der Kombinationen multipliziert mit 6 die Anzahl der Permutationen ergibt. Schüler, die weiter nachdenken, erkennen, daß $6 = 3!$ gilt. Es gibt nämlich drei Möglichkeiten für die Auswahl des ersten Buchstaben, für die Auswahl des zweiten bleiben dann nur noch zwei Möglichkeiten und schließlich eine für den letzten.

Jeder Schüler ist nun aufgefordert, weitere Anwendungsbeispiele zu finden, um die Beziehung zwischen Permutationen und Kombinationen allgemein zu formulieren. Das Ziel ist die Entdeckung $\binom{n}{k} = P(n,k)$. Am Schluß soll noch eine Formel für $\binom{n}{k}$ gefunden werden, die den Ausdruck $P(n,k)$ nicht enthält. Das führt schließlich zu der wichtigen Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Die No-Name Lösung

Diejenigen Schüler, die auf 64 verschiedene Möglichkeiten der Tapezierungen gekommen sind, werden nun enttäuscht sein, daß ihrer Lösung keine kombinatorische Figur entspricht. Ihre Lösung ist natürlich trotzdem gültig und der Lösungsweg entspricht vielen Anwendungen. Zahlreiche Anwendungsprobleme, bei denen es um angeordnete Auswahlen von Buchstaben oder Zahlen geht (z.B.: Autokennzeichen), fallen in diese Kategorie. Benutzt haben diese Schüler bei ihren Überlegungen das allgemeine Zählprinzip, das gelegentlich auch Produktregel der Kombinatorik genannt wird. Das wäre eine mögliche Fortsetzung der Unterrichtseinheit.

Zusammenfassung

Der hier gewählte Zugang zu Permutationen und Kombinationen unterscheidet sich konzeptionell von den traditionellen Wegen zu kombinatorischen Formeln. Ein bedeutender Aspekt dieser Unterrichtseinheit ist, daß Schüler motiviert wer-

den, sich ihre eigenen Urteile über Anordnung oder Wiederholung zu bilden. Diese Erfahrungen erlauben ihnen, Permutationen und Kombinationen begrifflich zu erfassen, weil sie diese in speziellen Anwendungen erfahren haben. Statt Formeln ohne Kontext zu lernen, partizipieren sie aktiv im Entwicklungsprozeß, der im Entdecken der Formeln gipfelt. Dieser Prozeß stärkt die Schüler, indem er ihnen die Gültigkeit ihrer Intuitionen bewußt macht.

Ergänzungen des Übersetzers

Im Anschluß dieses Beitrages einige deutsche Artikel, die sich mit dem didaktischen Problem der Gewinnung der kombinatorischen Grundformen beschäftigen. Bei *Steibl, 1948*, werden die Formeln gewonnen aus der Grundlage der „Wörter“, Klassen und Relationen. *Hefendehl-Hebeker und Törner, ebenfalls 1984*, wollen die Schüler in erster Linie mit den hinter den Regeln stehenden fundamentalen Ideen und Strategien vertraut machen. Ein spezielles Problem behandelt *Wegener-Kanthak, 1987*. Hier wird der fragend-entwickelnde Unterricht in den Vordergrund gestellt. Aus dem letzten Jahr stammt ein Beitrag von *Ulshöfer*, bei dem der Unterricht dann besonders erfolgreich sein dürfte, wenn die Lernenden die Aufgaben selbst ausdenken und formulieren. Schüler sollten schon sehr frühzeitig an kombinatorisches Abzählen herangeführt werden. Schließlich noch die zwei Hinweise für den Grundschulunterricht von *Eckert und Schulz*.

Steibl; H. : Exemplarische Entwicklung der kombinatorischen Grundformeln.

In: Der Mathematikunterricht 30(Januar 1984)1, 33-64.

Hefendehl-Hebeker, L.; Törner, G.: Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. In: Didaktik der Mathematik v.12(1984)4, S.245-262.

Wegener-Kanthack, U.: Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen. In: Praxis der Mathematik 29(Juli 1987)5, 257-259.

Ulshöfer, Klaus: Macht doch die Aufgaben selbst! Zum Thema Kombinatorik in Klasse 10. In: Mathematik in der Schule 36(Dezember 1998)12, 643-650.

Eckert, Eva; Eckert, Rudolf: Warum ist ein Fahrrad mit einem Zahlenschloss gut gegen Diebstahl gesichert? Eine Unterrichtseinheit für den 4. Jahrgang. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 22(1994)10, 457-460.

Schulz, C.: Zahlenschlosskombinationen aus drei Ziffern. Entwurf für eine Unterrichtsstunde im 3. Schuljahr. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe v.19(November 1991)11, S.505-511.