Literatur

[1] Barth, F. u.a. (1981): Stochastik Tabellen. München: Ehrenwirth
[2] Eggs, H. u.a. (1993): Tafeln zur Stochastik. Frankfurt: Diesterweg
[3] Krengel, U. (1991): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Vieweg : Braunschweig
[4] Mühlbauer, P.; Wörle, K. (1983): Tafelwerk zur Stochastik. München: bsv
[5] Niedersächsisches Kultusministerium (1998): Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung im Lande Niedersachsen - Mathematik. Schroedel: Hannover
[6] Reimann, S. (1997): Abiturprüfung 1996. Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik Leistungskurs Gymnasium Bayern. Stark: Freising
[7] Wirths, H. (1996): Schätz- und Prüfverfahren. Mathematik in der Schule Heft 11, S. 596-607, 610-611.
[8] Wirths, H. (1998): Binomialwahrscheinlichkeiten mit dem Computer. Stochastik in der Schule Heft 1, S. 43-54
[9] Wirths, H. (1998): Stochastik - Unterrichtsbeispiele und Aufgaben. Oldenburger Vor-Drucke Heft 362/98. Universität Oldenburg: Oldenburg 2. Auflage.

Poisson-Approximation und Kopplung

Peter Eichelsbacher / Helene Worms, Universität Bielefeld

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Poisson-Approximation der Binomial-Verteilung genauer zu untersuchen. Mit einfachen Methoden, die in der Fachwelt *Kopplungsmethoden* genannt werden, kann man genauere Informationen über die Güte der Konvergenz beim klassischen Poissonschen Grenzwertsatz erhalten. Wir diskutieren hier eine sehr einfache Kopplungsmethode. Weiter wollen wir herausarbeiten, daß gerade bei der Poisson-Approximation eine Aussage über die Güte der Annäherung von fundamentaler Bedeutung ist. Das benötigte mathematische Handwerkzeug legt es nahe, in einer Unterrichtseinheit eines Leistungskurses diese Art Gütediskussion führen zu können.

Der vielseitige Physiker und Mathematiker Siméon-Denis Poisson (1781-1840) leitete 1837 in seinem Hauptwerk zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Recherches sur la probabilité des jugements, en matière criminelle et en matière civile" im 81. Kapitel den heute nach *ihm* benannten Grenzübergang von der Binomial-Verteilung zur Poisson-Verteilung her. (Im Hauptteil dieses Werkes führt er das erstmals so benannte „Gesetz der großen Zahlen" ein. Es handelt sich dabei um den Grenzwertsatz, der als Spezialfall das von Jakob Bernoulli gefundene Gesetz enthält.) Der Mathematiker von Bortkiewicz machte 1898 auf die gefundene Poisson-Approximation aufmerksam und füllte diese Beobachtung durch eine Vielzahl von Beispielen mit Leben. Sehr bekannt ist wohl das militärische Beispiel der durch Hufschlag getöteten Soldaten, auf das wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

Es sei daran erinnert, daß eine Zufallsgröße X mit der Verteilung

$$P(X=k)=b(k;\,n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$
$$(q=1-p) \text{ für } k=0,1,\ldots,n$$

binomialverteilt heißt. Wenn man die Werte der Binomial-Verteilung betrachtet, so stellt man fest, daß bei gleichem Erwartungswert $\alpha = np$ die Werte $b(k;\,n,p)$ ähnlich sind und daß diese Ähnlichkeit mit wachsendem n zunimmt. Poisson bewies, daß für jeden festen Erwartungswert α eine Grenzverteilung existiert, der die in α übereinstimmenden Binomial-Verteilungen mit wachsendem n zustreben. Da n wächst, entspricht dies der mathematischen Forderung, daß die Folge $n\,p(n)$ gegen eine positive Zahl konvergieren möge, also insbesondere $p(n)$ eine Nullfolge ist. Was bedeutet die Bedingung, daß mit zunehmender Stichprobenzahl die Erfolgswahrscheinlichkeit $p(n)$ klein wird? Beim unabhängigen Münzwurf hat man Interpretationsprobleme! Anders formuliert: bei aller Schönheit des Poissonschen Grenzwertsatzes hat man Probleme, die Bedingung richtig zu verstehen. Man hat streng genommen auch ein Problem bei der mathematischen Modellierung, da man sogenannte Dreiecksschemata einführen müsste. In der folgenden Interpretation der Binomial-Verteilung versteht man die n-Abhängigkeit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p(n)$ besser. Man werfe rein zufällig ein Teilchen in ein Volumenelement V und betrachte das Ereignis, daß das Teilchen den Teilbereich $v \subset V$ trifft. Bei n-fach unabhängigem Werfen ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß $X = k$ Teilchen v treffen durch $b(k;\,n,p)$ mit $p = \dfrac{\mathrm{vol}(v)}{\mathrm{vol}(V)}$ gegeben. Hierbei bezeichne $vol(A)$ das Volumen einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ (wir beschränken uns gedanklich auf Teilmengen, deren Volumen wir berechnen können). Wenn man nun zu einem großen Teilchensystem übergehen möchte, wählt man intuitiv eine Folge von Volumina V_l, die gegen $\mathbb{R}^3$ aufstreben, so daß

$$\lim_{l\to\infty} \frac{n_l}{vol(V_l)} = \rho$$

gilt. Je größer das Volumen, desto mehr Teilchen wirft man unabhängig hinein, aber nicht uferlos mehr Teilchen, sondern soviele mehr, daß der relative Volumenanteil erhalten bleibt. Dann gilt

$$\lim_{l\to\infty} n_l p_l = \lim_{l\to\infty} \frac{vol(v)n_l}{vol(V_l)} = vol(v)\rho .$$

Die Bedingung des klassischen Grenzwertsatzes von Poisson ist also erfüllt und kann vernünftig interpretiert werden.

Wir wollen nun aber untersuchen, wie groß der Abstand der Binominalverteilung und der Poisson-Verteilung zu festem n und p ist. Wir klären in ein paar Zeilen, was wir mit einem *Abstand* meinen.

Für eine reelle Zahl $\alpha > 0$ betrachte man die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die durch

$$\pi_\alpha(k) = \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k, \; k \in \mathbb{N}_0,$$

definiert ist. Zunächst überzeugt man sich davon, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_\alpha(k) = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}e^{\alpha} = 1$$

ist. Dabei muß man sich an die Darstellung der Exponentialfunktion in ihrer Potenzreihenentwicklung erinnern. Wir werden später sehen, daß dies umgangen werden kann, wenn man den Grenzwertsatz von Poisson zur Verfügung hat. π_α ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Eine Zufallsgröße Y mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und der Verteilung π_α heißt *Poisson-verteilt mit Parameter* $\alpha > 0$.

Wir erinnern an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_\alpha(k) = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\alpha^k}{k!} =$$

$$e^{-\alpha}\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\alpha}\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!} = \alpha.$$

Eine Poisson-verteilte Zufallsgröße hat also den Erwartungswert α. Als nächstes wollen wir die Varianz ausrechnen:

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\pi_\alpha(k) = e^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\alpha^k}{k!} =$$

$$e^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k+2}}{k!} + \alpha =$$

$$\alpha^2 + \alpha.$$

Somit gilt

$$V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha.$$

Erwartungswert und Varianz einer Poisson-verteilten Zufallsgröße sind also gleich dem Parameter α. Erneut haben wir die Reihe der Exponentialfunktion betrachtet. Für das weitere Vorgehen benötigen wir den Erwartungswert und die Varianz einer Poisson-Verteilung allerdings nicht explizit, so daß man auf die Herleitungen via der Reihendarstellung im Unterricht zunächst vollständig verzichten kann.

Wir zeigen nun, daß die Poisson-Verteilung eine Approximation der Binomial-Verteilung ist: die Güte der Approximation wird in den Parametern n und p beschrieben. Zunächst überlegt man sich, in welcher Beziehung der Parameter α der Poisson-Verteilung zu den Parametern n, p der Binomial-Verteilung stehen soll. In Anlehnung an die obige Diskussion wählen wir α so, daß die Erwartungswerte übereinstimmen, das also $\alpha = np$ ist. Hier ist es also ein Punkt guter Motivation, den Erwartungswert einer Poisson-Verteilung zu kennen. Poisson sah also, daß $b(k; n, p)$ nahe bei $\pi_\alpha(k)$ für $\alpha = np$ liegt.

Um das zu präzisieren, führen wir nun einen Abstandsbegriff ein. Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße. Wir schreiben $P(X \in A) \sum_{k\in A} b(k; n, p)$ und $\pi_\alpha(A) = \sum_{k\in A}\pi_\alpha(k)$ mit $\alpha > 0$. Ein geeignetes Maß für den Abstand der Verteilung von X und der Poisson-Verteilung ist der sogenannte *Totalvariations-Abstand*, definiert durch

$$\Delta(n, p) := \sup_{A\subset\mathbb{N}_0} | P(X \in A) - \pi_{np}(A) | .$$

Bevor wir eine allgemeine Schranke für $\Delta(n, p)$ herleiten, betrachten wir den Fall des einmaligen Münzwurfes. Hier wollen wir $\Delta(1, p)$ einmal explizit bestimmen. Dazu verwenden wir eine alternative Darstellung des Totalvariations-Abstandes, die wir aber nicht beweisen wollen:

$$\Delta(n, p) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} | b(k; n, p) - \pi_{np}(k) | .$$

Es gilt

$$2\Delta(1, p) = |(1-p) - e^{-p}| + |p - pe^{-p}| + \sum_{k\geq 2}\pi_p(k) .$$

Nun ist $\sum_{k\geq 2}\pi_p(k) = 1 - e^{-p} - pe^{-p}$. Weiter gilt $p \geq pe^{-p}$. Wir verwenden nun noch die Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$ für $x > 0$, womit $|(1-p) - e^{-p}| = e^{-p} + p - 1$ folgt. Damit folgt

$$2\Delta(1,p) = e^{-p} + p - 1 + p - pe^{-p} + 1 - e^{-p} - pe^{-p}$$
$$= 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2,$$

wobei wir erneut die Ungleichung $1 - p \leq e^{-p}$ verwendet haben. Wir erhalten also $\Delta(1, p) = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$ beim einmaligen Münzwurf. Kann man nun beim n-maligen unabhängigen Münzwurf eine Schranke der Form np^2 erwarten?

Zunächst begründen wir, warum $1 - x \leq e^{-x}$ für $x > 0$ gilt: Wir wissen, daß $e^{-x} > 0$ für jedes x und mittels der zweiten Ableitung, daß e^{-x} strikt linksgekrümmt ist. Damit liegt aber der Graph jeder Tangente der Funktion unterhalb des Graphen der Funktion. $1 - x$ ist Tangente im Punkt (0, 1), womit die Ungleichung (zumindest sehr anschaulich!) bewiesen ist.

Tatsächlich stellen wir ein allgemeineres Resultat vor, welches in dieser Form in einer Arbeit von Hodges und Le Cam 1960 erstmals bewiesen wurde. Das dort vorgeführte Kopplungsargument findet man in einigen Lehrbüchern in modifizierter Form wieder. Wir arbeiten eine Modifikation in Anlehnung an Krengel [7] aus. Die Arbeit von Hodges und Le Cam gilt als Pionierarbeit für eine große Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten zum Bereich der Poisson-Approximation und der Anwendung von Kopplungsmethoden. Viele dieser Arbeiten verbessern das hier vorgestellte Resultat sogar für den aus wissenschaftlicher Sicht sehr einfachen Fall des n-maligen unabhängigen Münzwurfes. Stellvertretend seien hier Arbeiten von Serfling [10], Deheuvels und Pfeifer [4], Witte [12] und Barbour und Hall [2] genannt. Unter den Monographien zum Thema Poisson-Approximation und Kopplung seien Barbour, Holst und Janson [1] sowie Lindvall [9] und Thorrison [11] genannt.

Satz 1. Es seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, mit $P(X_i = 1) = p_i$ und $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ mit $0 < p_i < 1$ für alle $i = 1,\dots,n$. Sei $X = X_1 + \dots + X_n$ und $\lambda = p_1 + p_n$, dann gilt:

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}_0} | P(X \in A) - \pi_\lambda(A) | \leq \sum_{i=1}^{n} p^2_i .$$

Es folgt also im Fall $p = p_1 = \dots = p_n$:

Satz 2.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ gilt $\Delta(n, p) \leq np^2$.

Bevor wir Satz 1 beweisen, einige Kommentare: Der Beweis wird zeigen, daß die allgemeinere Version, also Satz 1, bei dem Erfolgswahrscheinlichkeiten zugelassen sind, die in ihrer Größe vom jeweiligen Wurf abhängen dürfen, keine zusätzliche Schwierigkeit mit sich bringen. Die Arbeit von Barbour und Hall [2] zeigt mit Hilfe der sogenannten *Steinschen Methode*, daß man sogar $\Delta(n, p) \leq p$ zeigen kann. Dies ist technisch sehr elegant beweisbar, aber für eine Einführung im Schulbereich nicht geeignet. Das Überraschende an diesem Resultat ist, daß die gesuchte Schranke von der Anzahl n der Experimente unabhängig ist!

Die Schranke in Satz 1 ist nur für kleine p_i interessant. Man kann daraus Grenzwertaussagen ableiten. Wir lassen dabei (im Falle $p = p_i$) p von n abhängen ($p := p_n$) und n nach unendlich streben. Falls $\lim_{x\to\infty} np_n^2 = 0$ gilt, so folgt aus Satz 2, daß $\lim_{x\to\infty} \Delta(n, p_n) = 0$ gilt. Insbesondere folgt der sogenannte *Poissonsche Grenzwertsatz*, der von Poisson im Jahre 1832 entdeckt wurde.

Satz 3 (*Grenzwertsatz von Poisson*). Ist $\alpha > 0$ und gilt $np_n \to \alpha > 0$ für $n \to \infty$, so gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{x\to\infty} b(k; n, p_n) = \pi_\alpha(k).$$

Satz 3 folgt sofort aus Satz 2: Aus $np_n \to \alpha$ folgt $p_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $np_n^2 \to 0$. Ferner ist

$$\frac{1}{2} | b(k; n, p) - \pi_{np_n}(k) | \leq \Delta(n,p) \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0.$$

Demzufolge gilt

$$\lim_{x\to\infty} | b(k; n, p_n) - \pi_{np_n}(k) | = 0.$$

Wegen $\pi_{np_n}(k) \to \pi_\alpha(k)$ folgt der Satz.

Die Aussage von Satz 2 ist auch im Fall, wo $np_n^2 \to 0$, aber $np_n \to \infty$ gelten, von Interesse (z. B. $p_n = 1/n^{2/3}$). Wir haben also nicht nur eine schöne Information über den Abstand der Verteilungen gefunden, sondern auch die Aussage des klassischen Grenzwertsatzes von Poisson verallgemeinert.

Der wichtigste Vorzug der Sätze 1 und 2 im Vergleich zu Satz 3 ist jedoch, daß eine ganz konkrete Approximationsschranke vorliegt. Satz 1 ist schwieriger zu beweisen als Satz 3. Obwohl – wie oben gesehen – letzterer eine unmittelbare Folge von Satz 2 ist, skizzieren wir den üblichen „Standardbeweis", der sehr kurz ist:

Beweis von Satz 3.
Setze $\alpha_n = np_n$. Nach Voraussetzung gilt $\alpha_n \to \alpha$.

$$b(k;n,p_n) = b\left(k; n, \frac{\alpha_n}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\alpha_n^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^k} =$$

$$\frac{\alpha_n^k}{k!} \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^k} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n .$$

Wegen $\alpha_n \to \alpha$ folgt $\alpha_n/n \to 0$. Weiter hat die Funktion $\log x$ an der Stelle 1 den Ableitungswert 1, also gilt $\log(1-h) = -h + h\Delta(h)$ mit $\Delta(h) \to 0$ für $h \to 0$. Es folgt

$$\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(-\frac{\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\Delta\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right)\right) \to \exp(-\alpha).$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n) = \frac{\alpha^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}. \quad \square$$

Es sei bemerkt, daß dieser Beweis mit Sorgfalt geführt werden sollte. Häufig findet man in Schulbüchern einen ungenauen Umgang mit der Tatsache, daß α_n sich auch mit n verändert. Man bezieht sich in den Herleitungen des Grenzwertsatzes bewußt auf den Fall der konstanten Wahl von $\alpha = np$.

Die untenstehende Tabelle gibt einige numerisch ermittelte Anhaltspunkte für den Vergleich zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung ($p = 0{,}1$). Man vergleiche den absoluten Fehler

$$|\pi_\alpha(k) - b(k;n,p)|$$

mit der in Satz 2 gefundenen Schranke.

k	$\pi_{0.5}(k)$	$b(k; 5, 0.1)$
0	0.6065	0.5905
1	0.3033	0.3281
2	0.0768	0.0729
3	0.0126	0.0081
4	0.00158	0.00045
5	0.00016	0.00001

k	$\pi_2(k)$	$b(k; 20, 0.1)$
0	0.1353	0.1216
1	0.2707	0.2702
2	0.2707	0.2852
3	0.1804	0.1901
5	0.0361	0.0319
10	0.000038	0.000052

Wir geben nun einen Beweis, daß π_α eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, ohne die Reihendarstellung der Exponentialverteilung verwenden zu müssen. Dies ist ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Beweis einer rein analytischen Aussage und ist daher vielleicht eine kleine Besonderheit, die in der Schule eine ganz neue Erkenntnis über Zusammenhänge einzelner mathematischer Bereiche bei Schülerinnen und Schülern hervorrufen kann.

Wir bezeichnen mit S_n eine binomialverteilte Zufallsgröße. Für jedes $c > 0$ gilt immer

$$1 = P(S_n < c) + P(S_n \geq c).$$

Nach der Markov-Ungleichung gilt

$$P(S_n \geq c) \leq \frac{E\left(S_n^2\right)}{c^2} = \frac{np(1-p)+n^2p^2}{c^2},$$

denn $V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2$, also hier $E(S_n^2) = np(1-p) + n^2p^2$. Somit gilt für jedes $c > 0$:

$$1 - \frac{np-np^2+n^2p^2}{c^2} \leq P(S_n < c) = \sum_{k=0}^{c-1} b(k;n,p) \leq 1.$$

Wählen wir nun $p = p_n$ wie in Satz 2, so folgt $\lim_{n\to\infty} np_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} np_n^2 = 0$ (denn p_n ist eine Nullfolge). Also folgt im Limes aus obiger Ungleichung für jedes $c > 0$:

$$1 - \frac{\alpha+\alpha^2}{c^2} \leq \sum_{k=0}^{c-1}\lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n) = \sum_{k=0}^{c-1}\pi_\alpha(k) \leq 1.$$

Im Limes $c \to \infty$ folgt $1 = \sum_{k\geq 0}\pi_\alpha(k)$, was wir zeigen wollten.

Bevor wir den Beweis von Satz 1 geben, stellen wir einen wichtigen Aspekt der Poisson-Verteilung bereit:

Sind X und Y unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ beziehungsweise $\mu > 0$, so ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$. Der Beweis dazu geht so:

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \quad \text{(Unabhängigkeit)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda}e^{-\mu}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}\right)e^{-(\lambda+\mu)} = \frac{1}{n!}(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}$$

$$= \pi_{\lambda+\mu}(n). \quad \square$$

Per Induktion folgt sofort, daß die Summe von endlich vielen unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsgrößen wieder Poisson-verteilt ist, wobei der Parameter sich als Summe der Einzelparameter ergibt.

Der Beweis von Satz 1 verwendet eine Technik, die man *Kopplung (coupling)* nennt. Sehr elementar ist dabei die folgende, sehr grundlegende *Doeblin-Ungleichung* herleitbar:

Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann gilt immer für $A \subset \mathbb{N}_0$

$$P(X \in A) - P(Y \in A) \leq P(X \neq Y).$$

Der Beweis ist sehr elementar: Es gilt

$$P(X \in A) - P(Y \in A) \leq$$

$$P(X \in A, Y \in A) + P(X \in A, Y \in A^c) - P(Y \in A)$$

und weiter ist die rechte Seite kleiner gleich

$$P(X \in A, Y \in A) + P(X \in A, Y \in A^c) - P(X \in A, Y \in A)$$

$$= P(X \in A, Y \in A^c).$$

Da aber $\{X \in A\} \cap \{Y \in A^c\} \subseteq \{X \neq Y\}$ gilt, folgt die behauptete Doeblin-Ungleichung. Vertauschen wir nun noch die Rollen von X und Y und verwenden $\{X \neq Y\} = \{Y \neq X\}$, erhalten wir insgesamt

$$|P(X \in A) - P(Y \in A)| \le P(X \neq Y),$$

also als einfache Folgerung

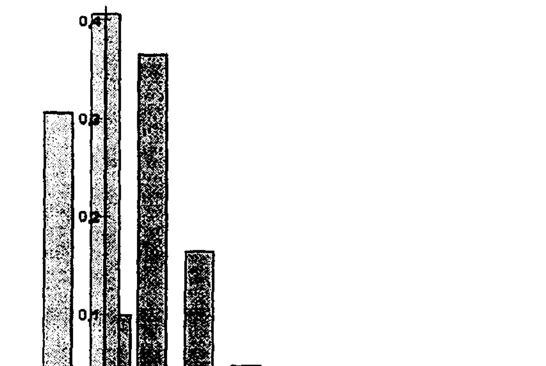
$$\sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |P(X \in A) - P(Y \in A)| \le P(X \neq Y).$$

In der Anwendung dieser einfachen Beobachtung wollen wir zeigen, daß

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |P(X \in A) - P(Y \in A)|$$

klein ist. Wir werden dies tun, indem wir Zufallsgrößen X, Y auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum Ω konstruieren, die die gewünschten Verteilungen haben (Binomialverteilung und Poisson-Verteilung), und die möglichst weitgehend übereinstimmen.

Wir wenden nun dieses Kopplungsargument an, um Satz 1 zu beweisen. Der Hauptteil des Beweises besteht in einer geeigneten Wahl des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes. Da wir nur die Verteilung von X berechnen müssen, ist es quasi egal, auf welchem Wahrscheinlichkeitsraum die Zufallsgrößen X_i definiert werden. Es ist für uns nur wichtig, daß die Zufallsgrößen unabhängig sind und $P(X_i = 1) = p_i$ sowie $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ gilt. Diese Freiheit nutzen wir für eine Wahl derart, daß eine Poisson-verteilte Zufallsgröße zum Parameter λ möglichst weitgehend mit X in Verteilung übereinstimmt. Dazu sei $\Omega_i = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $P_i(0) = 1 - p_i$ und $P_i(k) = \frac{e^{-p_i}}{k!} p_i^k$ für $k \ge 1$ sowie $P_i(-1) = 1 - P_i(0) - \sum_{k \ge 1} P_i(k) = e^{-p_i} - (1 - p_i)$. Wir nehmen bei 0 den kleineren Wert (nach $1 - p_i \le e^{-p_i}$ ist dies die Münzwurf-Wahrscheinlichkeit), für alle $k \ge 1$ wählen wir das Poissongewicht $\pi_{p_i}(k)$. Um insgesamt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten, transportieren wir die Differenzen zum Gesamtgewicht 1 auf einen neu geschaffenen freien Platz, hier -1. Die Wahl der einzelnen Wahrscheinlichkeiten wird durch das Bild unten veranschaulicht.



Betrachte den Produktraum (Ω, P) der (Ω_i, P_i). Also $A = \Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ und zu einem $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ setzen wir

$$P(\omega) := P_1(\omega_1) P_2(\omega_2) \ldots P_n(\omega_n).$$

Wir setzen für $\omega \in \Omega$

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega_i = 0, \\ 1, & \text{sonst}, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$Y_i(\omega) := \begin{cases} k, & \text{falls } \omega_i = k, k \ge 1, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Nach Definition haben die Zufallsgrößen X_i die geforderte Verteilung: $P(X_i = 1) = p_i$ und $P(X_i = 0) = 1 - p_i$. Weiterhin sind sie nach Definition des Produktraumes unabhängig. Dies ist ein Phänomen, was man im klassischen Schulunterricht vermutlich für die Bernoulli-Kette genau modelliert. Bei einer geeigneten Wahl für die Definition der stochastischen Unabhängigkeit von n Ereignissen kann man schnell sehen, daß Ereignisse, die sich jeweils nur auf eine Komponente des Produkts Ω beziehen, stochastisch unabhängig sind. Wir empfehlen zum Beispiel die Definition 156.1 aus Barth/Haller, aus der das Verlangte unmittelbar folgt.

Die Y_i sind nach Definition Poisson-verteilt zum Parameter p_i und ebenfalls unabhängig. Also folgt, daß $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$ Poisson-verteilt ist zum Parameter λ. Nun stimmen die Zufallsgrößen in den Werten 0 und 1 überein, und es ist

$$P(X_i = Y_i) = P_i(0) + P_i(1) = (1 - p_i) + e^{-p_i} p_i,$$

und somit

$$P(X_i \neq Y_i) = p_i(1 - e^{-p_i}) \le p_i^2,$$

wobei wir wieder $1 - e^{-x} \le x$ für $x > 0$ verwendet haben. Unter Zuhilfenahme von

$$P(X \neq Y) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\} \right) \le \sum_{i=1}^{n} P(X_i \neq Y_i)$$

folgt nun mit der Doeblin-Ungleichung

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |P(X \in A) - \pi_\lambda(A)| \le P(X \neq Y) \le \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir betrachten abschließend noch ein paar Beispiele.

(1): Gegeben seien 10^4 Säcke mit Korn. Es sei bekannt, daß sich in diesen Säcken 5000 markierte Körner befinden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in irgendeinem fixierten Sack wenigstens ein markiertes Korn ist? Es ist $p = \frac{1}{10^4}$ und $n = 5000$ (Körner zufällig auf Säcke verteilen). Also ist $np = 0.5$. Setze $I_k = 1$, wenn das k-te Korn in dem ausgewiesenen Sack ist. Dann ist

$$P\left(\sum_{k=1}^{5000} I_k = 0 \right) \approx e^{-np} = e^{-0.5},$$

also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\approx 1 - e^{-0.5}$.

Der Fehler ist kleiner oder gleich $\frac{5000}{10^8} = 5 \cdot 10^{-5}$.

(2): Ein Geiger-Müller Zählrohr Z und eine radioaktive Quelle Q seien so positioniert, daß ein Teilchen, das von Q emittiert wird, von Z mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} registriert wird. Während der Beobachtungszeit emittiert Q 30000 Teilchen. Man berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, daß Z mehr als 2 Teilchen registriert. Nach der Poisson-Approximation ist die Zahl X der registrierten Teilchen approximativ Poisson-verteilt zum Parameter $\alpha = 3$. Daher ist

$$P(X > 2) \approx 1 - e^{-3}(1 + 3 + 9/2).$$

Der Approximationsfehler ist maximal $3 \cdot 10^{-4}$.

Literatur

[1] Barbour, A. D.; Holst, L.; Janson, S. (1992): *Poisson Approximation*, Oxford studies in probability, 2; Oxford science publications

[2] Barbour, A. D.; Hall, P. (1984): *On the rate of Poisson convergence*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 95, 473-480

[3] Barth, F.; R. Haller (1991): *Stochastik, Leistungskurs*, Ehrenwirth Verlag

[4] Deheuvels, P.; Pfeifer, D. (1988): *On a relationship between Uspensky's theorem and Poisson approximations*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 40, 671-681

[5] Eichelsbacher, P. (1996): *Stochastische Methoden*, Vorlesungsskript, WS 1996/97

[6] Hodges, J. L.; Le Cam, L. (1960): *The Poisson approximation to the Poisson Binomial distribution*, The Annals of Mathematical Statistics, 31, 737-740

[7] Krengel, U. (1991): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg Studium

[8] Le Cam, L. (1960): *An approximation theorem for the Poisson binomial distribution*, Pacific Journal of Mathematics, 10, 1181-1197

[9] Lindvall, T. (1992): *Lectures on the coupling method*, Wiley Series in Probability

[10] Serfling, R. J. (1975): *A general Poisson approximation theorem*, Annals of Probability, 3, 726-73

[11] Thorrison, H. (1999): *The coupling method*, preprint of a new book

[12] Witte, H.-J. (1990): *A unification of some approaches to Poisson approximation*, Journal of applied probability, 27, 611-621

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 100131