Erfahrungen mit einer Leistungskurs-Abituraufgabe

ACHIM QUERMANN, BIELEFELD

Unterrichtliche Voraussetzungen

Stochastik war im Kurshalbjahr 13.1 (1999/2000) Unterrichtsgegenstand meines Leistungskurses Mathematik an der Gesamtschule Brackwede. Die Unterrichtsreihe war ein Pilotprojekt an unserer Schule, da bislang – auch in Leistungskursen – eine thematische Beschränkung auf die Bereiche Analysis und Lineare Algebra/Analytische Geometrie üblich war.

Da auch keiner der Fachkollegen und Fachkolleginnen an unserer Schule über Erfahrungen mit Stochastikunterricht in der gymnasialen Oberstufe verfügte, musste ich mich tastend auf Neuland vorwagen. Die Entscheidung für ein Stochastikhalbjahr ging auf ein eindeutiges Votum der Schülerinnen und Schüler meines Leistungskurses zurück.

Aus der geschilderten Situation folgte, dass ich ohne ein Lehrbuch arbeiten musste und statt dessen ein Skript für die Hand der Schüler erstellt habe. Dabei habe ich mich an verschiedensten marktüblichen Lehrbüchern sowie dem Klassiker von Engel 1983 orientiert.

Inhaltlich hatte der Kurs zunächst einen Schwerpunkt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Wahrscheinlichkeitsbegriff, Zufallsgrößen und ihre Kennwerte, bedingte Wahrscheinlichkeiten und Satz von Bayes, Wahrscheinlichkeitsverteilungen) und einen Schwerpunkt in der beurteilenden Statistik (ein- und zweiseitige Testverfahren, Vorzeichentest, Exakter Test von Fischer, Gütekriterien i.S. der Operations-Charakteristik, lokale und integrale Näherungsformel von Moivre/Laplace).

Da nur ein Kurshalbjahr zur Verfügung stand, habe ich dabei die Wahrscheinlichkeitsrechnung stark im Hinblick auf die beurteilende Statistik unterrichtet und kombinatorische Fragestellungen auf ein Minimum reduziert.

Für die Abiturklausur standen den Schülern 4,25 Zeitstunden zur Verfügung. In dieser Zeit waren die nachfolgend beschriebene Stochastikaufgabe sowie je eine Aufgabe aus dem Bereich der Analysis und der Analytischen Geometrie zu bearbeiten. Als Hilfsmittel standen ein nicht programmierbarer Taschenrechner und die Formelsammlung Strick/Wurl 1997 zur Verfügung.

Die hier ausgeführte Aufgabe wurde – angeregt durch MUED-Materialien - in dieser Form von mir entwickelt, findet sich aber in ähnlichen Ansätzen auch im kürzlich erschienen Lehrbuch von Griesel/Postel 2000 wieder.

Aufgabenstellungen

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 bis 60 Jahren etwa 50.000 mit Aids infiziert sind. Das entspricht einem Anteil von 0,125%.

a) In einem Labor wird eine anonyme Untersuchung von Blutgruppen auf das Aids-Virus vorgenommen. Die Proben entstammen einer für die oben beschriebene Personengruppe (sexuell aktive Personen im Alter von 18 bis 60 Jahren) repräsentativen, sehr großen Stichprobe. Unterstellen Sie vorerst, dass es einen 100% sicheren Test zum Nachweis einer Aids-Infektion gibt.

   Wie viele Proben müsste man mindestens untersuchen, um mit wenigstens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine positive Blutprobe zu erhalten ?

b) In den letzten Jahren haben Forscher einen Test entwickelt, der zwar nicht sicher ist im Sinne von Aufgabenteil a), wohl aber mit hoher Wahrscheinlichkeit richtige Diagnosen trifft.

   Wird eine Person untersucht, die tatsächlich mit Aids infiziert ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test dies auch nachweist, 99,8%.

   Wird hingegen eine nicht infizierte Person getestet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test sie auch als nicht infiziert erkennt, 99%.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich mit Aids infiziert ? (Benutzen Sie ein Baumdiagramm).

c) Das Ergebnis von Aufgabenteil b) verleitet zu der Aussage. „Der Test hat keine diagnostische Aussagekraft".

   Bewerten Sie diese Aussage, indem Sie die a-priori- und die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten vergleichen.

d) Lösen Sie die Aufgabe aus Aufgabenteil a) noch einmal, indem Sie sich nun von der idealisierten Annahme „100% sicherer Test" lösen und statt dessen den in Aufgabenteil b) beschriebenen Test zu Grunde legen.

Erklären Sie den deutlichen Unterschied zwischen den Ergebnissen.

e) Ein Pharmakonzern behauptet, ein Medikament entwickelt zu haben, das den Krankheitsverlauf bei mindestens 40% der mit Aids Infizierten positiv beeinflusst. Ein Konkurrenzunternehmen bezweifelt dies und gibt eine Kontrolluntersuchung an 100 freiwilligen Patienten in Auftrag.

Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für einen Signifikanztest auf 5%-Niveau. Benutzen Sie dabei die Integrale Näherungsformel von De Moivre/ Laplace. Ermitteln Sie die Operations-Charakteristik für diesen Test im relevanten Bereich (10%-Schritte) und zeichnen Sie die OC-Kurve. Benutzen Sie hier die Tabelle für die kumulierte Binomialverteilung.

Auf welche Unzulänglichkeiten des Tests weist die OC-Kurve hin, und wie ließen sich diese verringern?

Erwartete Schülerleistung und Aufgabenlösungen

Die gesamte Aufgabe ist so angelegt, dass die Schüler umgangssprachlich beschriebene realitätsnahe Inhalte in adäquate mathematische Problemstellungen übersetzen müssen. Die zu benutzenden Methoden sind – wenn auch nicht in dieser Zusammenstellung – aus dem Unterricht bekannt. Aufgabenstellungen, die nach Begründungen oder Erläuterungen fragen (c/d/e), geben den Schülern Gelegenheit, Verständnis für stochastische Methoden und Begriffe unter Beweis zu stellen.

Im ersten **Aufgabenteil a)** sollen die Schüler die beschriebene Situation (wiederholte Untersuchung einer Blutprobe aus einer großen Grundgesamtheit) begründet als Bernoulli-Experiment ausweisen. Die Zufallsgröße X „Anzahl der positiv getesteten Blutproben bei n Personen“ kann also als $B_{n\,;\,0{,}00125}$-verteilt angesehen werden.

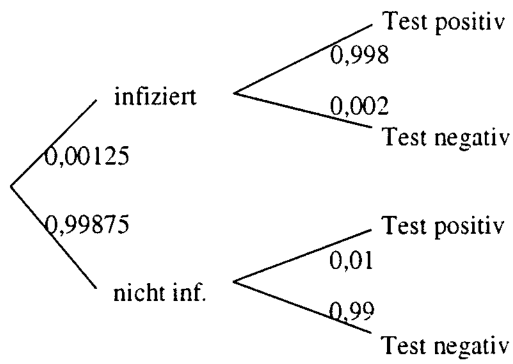
Damit ergibt sich:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X{=}0) = 1 - 0{,}99875^n \geq 0{,}99$

Die entstandene Ungleichung ist durch Logarithmierung (unter Beachtung von ln 0,99875 <0 !) zu lösen und führt auf $n \approx 3681{,}8$.

Das heißt, es sind mindestens 3682 Personen zu untersuchen .

Die Lösung von **Aufgabenteil b)** führt zunächst auf folgendes Baumdiagramm:



Damit ergibt sich die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit aus:

$P_{T\,pos.}(\text{infiziert}) =$

$$\frac{P(T.pos.und.\inf.)}{P(T.pos.)} = \frac{0{,}00125 \cdot 0{,}998}{0{,}00125 \cdot 0{,}998 + 0{,}99875 \cdot 0{,}01} \approx 11{,}1\%$$

Im **Aufgabenteil c)** sollen die Schüler eine Wertung einer Aussage auf Grund vorheriger mathematischer Ergebnisse und unter Heranziehung der nicht elementaren Begriffe „a-priori“ und „a-posteriori-Wahrscheinlichkeit“ vornehmen.

Auf den ersten Blick scheint ein positives Testergebnis nicht viel auszusagen, da es - wie gezeigt – nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 11,1% auf eine wirkliche Infektion hinweist.

Andererseits ist für eine positiv getestete Person die Vor-Test-Wahrscheinlichkeit (a-priori) für eine Infektion von 0,125% auf eine Nach-Test-Wahrscheinlichkeit (a-posteriori) von 11,1% gestiegen. Das bedeutet immerhin eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit fast um den Faktor 90. Der Test ist also zwar bei weitem nicht sicher, wohl aber ein wichtiges Indiz für eine Infektion.

Aufgabenteil d) ist mathematisch weitgehend mit Teil a) identisch. Eine Abkürzung der Rechnung durch die Schüler ist an dieser Stelle erwünscht. Die Erklärung der Diskrepanzen in den Ergebnissen (unsichere Diagnose seltener Ereignisse!) verlangt eine vertiefte Einsicht in die mathematischen Zusammenhänge .

Rechnerisch ergibt sich:

P(Test pos.)
$= 0.00125 \cdot 0{,}998 + 0{,}99875 \cdot 0{,}01 = 0{,}011235$

P(Test neg.) $= 1 - 0{,}011235 = 0{,}988765$

Analog zu Aufgabenteil a) ergibt sich:

$$n = \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}988765} \approx 407{,}6$$

Mit dem real existierenden Test wird man also erwarten dürfen, bei einer weitaus geringeren Personenzahl (408 zu 3682) mit hoher Wahrscheinlichkeit auf wenigstens ein positives Testergebnis zu stoßen. Die Ursache ist darin zu sehen, dass bei einem nicht idealen Test auch nicht infizierte Personen positive Testergebnisse liefern können. Da die Zahl der Nichtinfizierten in Relation zu den Infizierten überwältigend groß ist, fallen diese Ergebnisse stark ins Gewicht.

Im abschließenden **Aufgabenteil e)** sollen die Schüler einen vom Typ her vertrauten Hypothesentest durchführen. Die Aufgabe ist absichtlich so formuliert, dass sowohl die Fähigkeit zum Umgang mit der Integralen Näherungsformel als auch der Umgang mit einer Tabelle zur Kumulierten Binomialverteilung (Formelsammlung) nachgewiesen werden kann:

Zufallsgröße Y: Anz.der Pers.i.d.Stichpr., b.d. Krankheitverl.pos.beeinfl.wird

Hypothese H_0: $p \geq 0{,}4$

Gegenhypothese H_1: $p<0{,}4$ (linksseitiger Test)

Setzt man H_0 als wahr voraus, ist Y im Extremfall $B_{100;0{,}4}$-verteilt.

Daher gilt: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}60} = \sqrt{24}$

Gesucht ist eine Grenze g: $P(Y \leq g) \leq 0{,}05$.

Da $\sigma > 3$ ist, lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch die integrale Näherungsformel von Moivre/Laplace approximieren:

$$P(Y \leq g) \approx \Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 40}{\sqrt{24}}\right) \leq 0{,}05$$

Aus der tabellierten GAUSSschen Integralfunktion (Formelsammlung) ergibt sich

$$\frac{g - 39{,}5}{\sqrt{24}} \leq -1{,}65 \Rightarrow g \approx 31{,}4$$

Damit gilt für den kritischen Bereich von H_0 auf 5%-Niveau: $K = \{0;1;\ldots 31\}$ und entsprechend $\overline{K} = \{32;33;\ldots 100\}$

Die Operations-Charakteristik beschreibt den Fehler 2.Art in Abhängigkeit von variablen „wahren" Wahrscheinlichkeiten p_1 (bezogen auf H_1).

$$\beta = P_{p_1}(Y \in \overline{K}) = P_{p_1}(Y \geq 32) = 1 - P_{p_1}(Y \leq 31)$$

Mittels der Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung ergibt sich im relevanten Bereich:

p_1	0%	10%	20%
$P_{p_1}(Y \in \overline{K})$	0%	1-1=0%	1-0,997=0,3%

p_1	30%	40%	...
$P_{p_1}(Y \in \overline{K})$	1-0,633=36,7%	1-0,04=96,0%	...

Die Tabelle zeigt ebenso wie – der hier nicht skizzierte – Graph, dass „wahre" Erfolgswahrscheinlichkeiten im Bereich bis 30% noch mit einem hohen Fehler 2.Art verbunden sind. Das heißt, der Test ist in diesem Bereich nicht sonderlich trennscharf. Dies wäre durch eine Erhöhung des Stichprobenumfanges zu verändern („steilere" OC-Kurve).

Zu den erreichten Ergebnissen

Von der Durchschnittspunktzahl unterscheiden sich die im Kurs erzielten Ergebnisse bei dieser Stochastikaufgabe nicht signifikant von den Ergebnissen in den anderen beiden Aufgaben.

Allerdings fällt eine gewisse Tendenz zur „Dichotomisierung" auf: Von den 19 Schülerinnen und Schülern erzielten je 5 sehr gute oder gute Ergebnisse in diesem Prüfungsteil, während auf der anderen Seite aber auch 6 Schüler mangelhafte oder schlechtere Ergebnisse erreichten.

Für die Fehlleistungen waren vor allem die Aufgabenteile a) und d) verantwortlich. Hier fiel es schwächeren Schülern überraschend schwer, die eigentlich nicht unbekannte Grundsituation („Warten auf den ersten Erfolg") zu erkennen. Selbstkritisch sei angemerkt, dass die Aufgabenkonstruktion dazu führt, dass Schüler, die Probleme mit Aufgabenteil a) haben, wahrscheinlich auch an Aufgabenteil d) scheitern. Dies wäre zu überdenken.

Schließlich bereitete auch Aufgabenteil c) einige Probleme. Die Argumentation vieler Schüler lief darauf hinaus zu erklären, wieso die in Aufgabenteil b) berechnete Wahrscheinlichkeit von 11,1% so überraschend niedrig ausfällt. Die Ausführungen hierzu waren durchaus richtig, entsprachen aber nicht der Aufgabenstellung.

Insgesamt fühle ich mich sowohl durch die Ergebnisse der Abiturklausur als auch durch die rückblickenden Bewertungen der Schüler in der Entscheidung zur Aufnahme eines Stochastikkurses bestärkt: Von den 19 Schülerinnen und Schülern waren am Ende des Kurshalbjahres 18 der Meinung, es sei sinnvoll und gewinnbringend gewesen, dieses Thema im Unterricht zu behandeln.

Literatur

Engel,A. (1983). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik – Stuttgart:Klett

Griesel,H.; Postel,H.(Hg.) (2000).Elemente der Mathematik – Hannover: Schroedel

Strick,H.K.; Wurl,B. (1997). Formelsammlung für Gymnasien – Hannover: Schroedel

Anschrift des Verfassers:
Achim Quermann
Marienfelder Str. 69c
33649 Bielefeld

Wie kann man Wahlergebnisse und AIDS-Risiken intuitiv darstellen - ein Kommentar der Herausgeberin zu den Beiträgen von Hildebrand und Quermann

LAURA MARTIGNON, SILKE ATMACA UND STEFAN KRAUSS

Bei Abitur-Aufgaben, die zum Themenbereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten gehören, wird vom Schüler oft erwartet, dass er die in der Aufgabe gegebenen Wahrscheinlichkeiten in ein Baumdiagramm übertragen und dann anhand der Pfadregeln die richtige Lösung ableiten kann. Dies ist z.B. in der Grundkurs-Abituraufgabe (siehe Beitrag von Achim Hildebrand in diesem Heft) bei Teilaufgabe 2.1 der Fall und in der Leistungskurs-Abituraufgabe (siehe Beitrag von Achim Quermann in diesem Heft) bei Teilaufgabe b. Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, dass die Betrachtung bedingter Wahrscheinlichkeiten zwar eine Lösung solcher Aufgaben ermöglicht, aber letztlich keine echte Einsicht in die zugrunde liegende Situation vermitteln kann: Will man die Aufgabe nicht nur lösen, sondern auch die Intuition des Schülers in Einklang zu dieser Lösung bringen, sollte man Baumdiagramme statt mit Wahrscheinlichkeiten lieber mit absoluten Häufigkeiten besetzen. Wir wollen im Folgenden die beiden erwähnten Aufgaben mit Hilfe von "Häufigkeitsbäumen" lösen:

Lösung von Aufgabe 2.1

(Aufgabenstellung siehe Beitrag von Hildebrand in diesem Heft):

<u>Trick:</u> Man stelle sich 10.000 Wahlberechtigte vor. Aus den Informationen in den beiden Zeitungsartikeln erhält man nun die beiden folgenden Baumdiagramme: