

# Simulationen im Statistikunterricht <sup>1</sup>

TED HODGSON UND MAURICE BURKE

Übersetzung und Bearbeitung: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

**Zusammenfassung:** *Der Einsatz von Simulationen als Unterrichtsmittel kann ein vertieftes begriffliches und konzeptionelles Verstehen von Statistik unterstützen, es kann aber auch zu Fehlvorstellungen führen. Unterrichtende müssen sich der Missverständnisse bewusst sein, die aus dem Einsatz von Simulationen resultieren können und die Lernumgebung sorgfältig strukturieren, so dass die Vorzüge dieses mächtigen Unterrichtsmittels zum Tragen kommen.*

## 1 Einleitung

Die Stärken von Simulationen als ein Hilfsmittel zum Problemlösen sind wohl bekannt. Mit der gegenwärtigen Betonung von Projekten, Aktivitäten und handlungsorientiertem Lernen spielen Simulationen noch eine weitere Rolle im Statistikunterricht. Simulationen dienen als ein Kontext für das Lehren statistischer Konzepte.

Als Beispiel betrachten wir Hodgson und Borbowski's (1998) Einsatz von Simulationen, um die Unterschiede zwischen zwei wichtigen Techniken zum Erheben von Stichproben zu illustrieren. Bei dieser Aktivität sammeln Lernende wiederholt einfache und geschichtete Zufallsstichproben vom Umfang 4, berechnen das dazugehörigen Stichprobenmittel und erstellen Histogramme, die sie dann einsetzen, um den Mittelwert der Grundgesamtheit zu schätzen. Die Grundgesamtheit, dargestellt in Tabelle 1, besteht aus 40 Karten von denen 20 eine rote und 20 eine schwarze Zahl tragen. Darüber hinaus gibt es einen Zusammenhang zwischen Farbe und Wert der Karte: rote Karten haben numerisch kleine Werte, während der Wert auf jeder schwarzen Karte groß ist. Natürlich besteht bei einer derart kleinen Grundgesamtheit keine Notwendigkeit, eine Stichprobe zu erheben. Dennoch ist die einzige Information, die die Lerngruppe erhält, dass die Grundgesamtheit aus der gleichen Zahl roter wie schwarzer Karten besteht. Sie erhalten keinerlei Informationen über den numerischen Wert auf den Karten oder über den Umfang der Grundgesamtheit. Die Karten selbst befinden sich in einer Papiertüte. Daher können die Lernenden nur mittels Stichproben etwas über die Grundgesamtheit erfahren.

X	Farbe	Häufigkeit
6	rot	4
7	rot	4
8	rot	4
9	rot	4
10	rot	4
26	schwarz	4
27	schwarz	4
28	schwarz	4
29	schwarz	4
30	schwarz	4

Tab. 1: Die der Stichprobensimulation zugrunde liegende Grundgesamtheit

Auch wenn die genannte Aufgabe sich auf den Mittelwert der Grundgesamtheit bezieht, ist das zentrale Lernziel hier, Vor- und Nachteile von einfachen Stichproben und geschichteten Stichproben zu verstehen. Jedes der beiden Stichprobenverfahren erzeugt ein unterschiedliches Histogramm und es ist der Vergleich dieser Histogramme, die zu einem verbesserten Verstehen der Stichprobenverfahren führt. Bei einfachen Zufallsstichproben verändert sich beispielsweise bei jeder Wiederholung der Aktivität das Verhältnis von roten zu schwarzen Karten. Einige Stichproben bestehen ausschließlich aus roten Karten, andere nur aus schwarzen Karten und einige enthalten eine Mischung von beiden. Als Resultat führt das einfache Stichprobenziehen zu sehr stark variierenden Schätzungen des Populationsmittels wie man in Abbildung 1 sieht. Andererseits spiegelt das Verhältnis von roten zu schwarzen Karten in jeder der geschichteten Stichproben das Verhältnis in der Grundgesamtheit wieder. Einfache Zufallsstichproben werden aus jeder Schicht gezogen, aber das angemessene Verhältnis von roten und schwarzen Karten in der geschichteten Stichprobe verspricht ein präziseres Ergebnis des Populationsmittels, wie auch Abbildung 2 bestätigt. Daher vermittelt diese Aktivität den Lernenden ein Wissen aus erster Hand über die Vorteile, die mit einer geschichteten Stichprobe einhergehen.

<sup>1</sup>Übersetzung aus *Teaching Statistics*, 2000 (3), 91-96

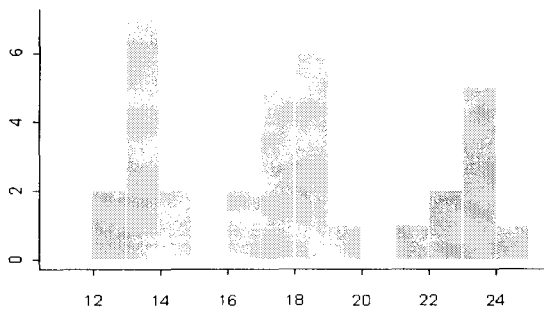


Abb. 1: Ein Häufigkeitshistogramm der Mittelwerte basierend auf einfachen Zufallsstichproben

Trotz ihres verbreiteten Einsatzes als ein Hilfsmittel im Unterricht haben Simulationen in der Forschungsliteratur noch wenig Aufmerksamkeit erhalten. Mit diesem Aufsatz wollen wir die Diskussion über dieses wichtige Lehrmittel voranbringen. Warum werden Simulationen eingesetzt? Was ist der erwartete Nutzen? Wir geben einen kurzen Überblick über verschiedene Studien, die die Auswirkungen von Simulationen auf das Verstehen von Schülerinnen und Schüler untersuchen. Schließlich geben wir unter Bezug auf die Literatur und die Ergebnisse eigener vorläufiger Untersuchungen Empfehlungen bezüglich eines effizienten Einsatzes von Simulationen im Statistikkunterricht.

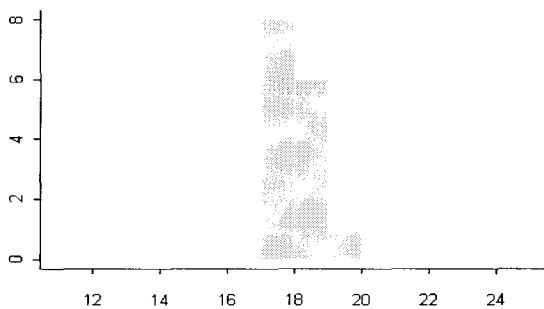


Abb. 2: Ein Häufigkeitshistogramm der Mittelwerte basierend auf geschichteten Stichproben

## 2 Die Verheißungen von Simulationen

In seinem Überblicksaufsatz über Forschungsarbeiten zum Lehren und Lernen von Statistik behauptet Shaughnessy (1992), dass Lernende aus einem traditionellen Statistikkurs mit wenig mehr als einem mechanistischen Verständnis herauskommen. Der Ein-

satz von Simulationen auf der anderen Seite verspricht hingegen ein konzeptionelles Lernen von Statistik zu fördern. Schauen wir z.B. auf Hodgson und Borbowski's (1998) Einführung von Stichprobenverfahren im Vergleich zu einer traditionellen Behandlung desselben Themas. Im traditionellen Unterricht werden Lernende vielleicht die Definition von geschichteten Stichproben erfahren und das Vorgehen lernen, wie sie erhoben werden. Dann erhalten sie Daten, die schon in Schichten eingeteilt sind, und sie werden gebeten, den Mittelwert zu errechnen. Gelegentlich tauchen Fragen auf wie z.B., ob man auch Schichten unterschiedlicher Größe zulässt. Jedoch liegt das Hauptaugenmerk dabei auf der Algorithmik: Schüler lernen, wie aus geschichteten Stichproben Schätzwerte errechnet werden.

Im Gegensatz dazu ermutigt die Aktivität von Hodgson und Borkowski Schüler dazu, die begrifflichen Grundlagen von geschichteten Stichproben zu betrachten. Obwohl sich die Aktivität auf die Mechanik geschichteter Stichproben konzentriert, ziehen Schüler auch zugrundeliegende *Warum-* und *Was-* Fragen in Betracht. Warum erhebt man geschichtete Stichproben? Welche Vorteile bieten sie? Zusätzlich verspricht die handlungsorientierte Natur dieser Aktivität zu einem tieferen und persönlicherem Niveau des Verstehens zu führen. Schülern wird nicht einfach nur von den Unterschieden der beiden Stichprobenverfahren etwas berichtet. Vielmehr entspringt ihr Verstehen ihren Aktionen - Stichproben sammeln, Mittelwerte errechnen, Histogramme erstellen und Ergebnisse vergleichen, die vom jeweiligen Stichprobenverfahren erzeugt wurden.

Im allgemeinen verspricht der unterrichtliche Einsatz von Simulationen ein tieferes begriffliches Verstehen. Ohne verbreitete Forschung über das Lernen von Statistik lässt sich jedoch in Frage stellen, ob dieses Versprechen tatsächlich auch eingelöst wird. Glücklicherweise wird die Zuversicht über die Effektivität von simulationsbasiertem Unterricht von jüngeren Forschungen bestätigt. In einer Reihe von Experimenten berichtet Garfield und del Mas (1989, 1994), dass Computer-basierte Simulationen das Verstehen der Schüler von komplexen Konzepten positiv beeinflussen. In ähnlicher Weise berichten mehrere jüngere Studien von positiven Effekten auf das konzeptionelle Verstehen, wenn traditionelle Curricula so umstrukturiert werden, dass auch Simulationen und aktive Erkundungen statistischer Konzepte eingeschlossen sind (Gnanadesikan *et al.*, 1997; Romero *et al.*, 1995; Sullivan, 1995).

### 3 Die Fallstricke von Simulationen

Trotz ihres intuitiven Reizes and zunehmender empirischer Stützung bietet der Einsatz von Simulationen keine Garantie, dass Schüler ein angemessenes Konzept für statistische Ideen entwickeln. In ihrer Analyse, wie Schüler das Gesetz der großen Zahl verstehen, haben beispielsweise Well *et al.* (1990) entdeckt, dass viele Schüler selbst nach beachtlicher Erfahrung mit Computersimulationen nicht verstehen, welche Auswirkungen der Stichprobenumfang auf die Variabilität hat. Ähnlich berichtet Oursland (1997), dass handlungsorientierter Unterricht - selbst wenn Schüler dabei konkretes Material einsetzen, um Experimente durchzuführen und Daten zu sammeln - nicht immer dem konzeptionellen Verstehen zuträglich ist und sogar beim Statistik lernen hinderlich sein kann.

In unserer eigenen Forschung (siehe Hodgson, 1996) haben wir ähnliche Fallstricke entdeckt. Dabei haben wir herausgefunden, dass Simualtionen nicht immun gegen Fehlvorstellungen machen, sie können sogar zu ihrer Bildung beitragen. Beispielsweise zogen bei einer Aktivität zur Einführung des Zentralen Grenzwertsatzes die Studierenden einer unserer letzten Einführungskurse aus einem Behälter mit nummerierten Papierzettelchen einfache Zufallsstichproben vom Umfang 4 (mit Zurücklegen) und berechneten den jeweiligen Mittelwert. Die Daten wurden dann zusammen genommen und die Studierenden erstellten Histogramme aller Resultate, beschrieben die Form der sich ergebenden Verteilung und benutzten ihre Daten, um Schlussfolgerungen über das wahre Populationsmittel zu ziehen. Anschließend wurden diese Aktivitäten am Computer simuliert. Das Programm erlaubte den Studierenden auch die zugrundeliegende Population, den Stichprobenumfang und die Zahl der zu ziehenden Stichproben zu wählen. Das Programm sammelte Stichproben des angegebenen Umfangs, berechnete Stichprobenmittel und stellte die relativen Häufigkeiten der Stichprobenmittel grafisch dar. Natürlich unterscheiden sich die Ergebnisse von einzelnen Versuchen. Insgesamt jedoch erlaubte das Programm den Studierenden, die Lage und die Variabilität der Stichprobenverteilung mit der zugrundeliegenden Population zu vergleichen. Da letztere sich nicht änderte, waren die Studierenden darüber hinaus in der Lage den Stichprobenumfang zu variieren und die Auswirkungen davon auf die Variabilität zu beobachten. Aus dieser Aktivität sollte eigentlich ein Verstehen des Zentralen Grenzwertsatzes resultieren, sobald die Studierenden die Ergebnisse beobachten, die von großen Stichproben

und einer großen Zahl von Wiederholungen erzeugt werden.

Direkt nach Abschluss dieser Aktivität und noch vor einer formellen Diskussion ihrer Beobachtungen haben die Studierenden einen offenen Fragebogen erhalten, der ihr Verstehen der Stichprobenverteilung und des Zentralen Grenzwertsatzes zu erfassen suchte. Auch wenn die Antworten andeuteten, dass sie tatsächlich etwas von diesen statistischen Begriffen verstanden hatten, so brachte die Aktivität auch einige unbeabsichtigte Ergebnisse hervor. Ein Drittel der 18 Antwortenden drückten ihre Überzeugung aus, dass man viele Stichproben ziehen *muss*, um statistisch gültige Schlüsse ziehen zu können. Follow-up Interviews deuteten weiterhin an, dass diese Überzeugungen direkt auf die unterrichtliche Aktivität zu beziehen ist, wie der folgende Ausschnitt andeutet:

Was ich über Stichprobenverteilungen gelernt habe ist, dass das Stichprobenmittel ein guter Schätzer des Populationsmittel ist, speziell wenn der Stichprobenumfang groß ist. Unsere Experimente zeigten, dass man vorsichtig sein muss. Wir können gute Informationen über die Grundgesamtheit mit Hilfe des Stichprobenmittel erhalten, *aber nur, wenn wir viele Stichproben nehmen.* (Betonung hinzugefügt)

Wir hatten gehofft, dass diese Aktivität Studierenden ein größeres Vertrauen in die Anwendung von Stichprobenverfahren gibt (z.B. Stichprobenmittel stellen einen angemessenen und relativ präzisen Schätzer des Populationsmittels dar) sowie ein Verstehen von der Beziehung zwischen großem Stichprobenumfang, Zuwächsen in der Präzision und Annäherung an die Normalverteilung. Die Antworten der Studierenden deuten auf Fortschritte hin, aber sie offenbarten auch falsche Vorstellungen über das wiederholte Stichprobenziehen und seine Rolle im statistischen Entscheidungsprozess wie z.B., dass man wiederholt Stichproben ziehen *muss*, um gültige Entscheidungen zu treffen.

### 4 Diskussion

Intuitiv kann der Einsatz von Simulationen zur Entwicklung eines tieferen begrifflichen Verstehens von Statistik führen. Neuere Forschungen unterstützen diese Behauptung. Andererseits gibt es Anzeichen, dass handlungsorientierter Unterricht keine Garantie für die Bildung angemessener begrifflicher Vorstellungen ist und sogar die Bildung von Fehlvorstellungen

gen begünstigen kann. Die Effizienz von unterrichtlichen Aktivitäten, die Simulationen einsetzen, ist daher keine inhärente Eigenschaft dieser Aktivitäten, sondern hängt von Lehrer- und Schüleraktivitäten ab. Daher stellt sich die Frage: "Wie setzt man Simulationen effizient ein, um Statistik zu lehren?"

Auch wenn wir nicht so tun wollen als hätten wir die definitive Antwort (falls es überhaupt eine gibt), so glauben wir, dass unsere vorläufigen Forschungsergebnisse und die Resultate von Kollegen einige Hinweise liefern. Speziell deutet die Entdeckung, dass simulationsbasierter Unterricht zu den Missverständnissen der Schüler beitragen kann, darauf hin, dass die Effizienz dieser Aktivitäten mit den Bemühungen der Schüler aufs engste verbunden sind, einen Sinn in ihren Aktivitäten zu finden. Theoretisch beachten Schüler die hervorstechenden Charakteristika der Aktivitäten und entwickeln tragfähige Konzepte der zugrunde liegenden statistischen Ideen. Unsere Forschungen deuten jedoch darauf hin, dass die zentralen Charakteristika von Simulations-basierten Aktivitäten Schülern nicht direkt offensichtlich sind.

In unserer Aktivität zum Zentralen Grenzwertsatz sollten Lernende Simulationen durchführen und Verallgemeinerungen auf der Basis dieser Resultate entwickeln. Aus der Perspektive der Schüler verdeckte jedoch das wiederholte Ziehen von Stichproben die wahre Intention dieser Aktivität. Insbesondere schienen die Lernenden den Zweck einer großen Zahl von Stichproben darin zu sehen, dass es eine Strategie ist, bei Anwendungen den Populationsparameter zu finden. Dabei haben sie den tatsächlichen Zweck der Simulation verkannt, der darin bestand, ein Verständnis dafür zu entwickeln, dass bei hinreichend großer Stichprobe zufälliges Stichprobenziehen mit hoher Wahrscheinlichkeit zu Stichprobenmittelwerten führt, die 'nahe' am wahren Mittel der Grundgesamtheit sind.

## 5 Empfehlungen

Für Lehrende ist es wichtig, sich daran zu erinnern, dass die Wahrnehmung aller unserer Aktivitäten sich von denen Wahrnehmungen unserer Schüler unterscheiden. Das gilt auch beim Einsatz von Simulationen. Unser Vertrautsein mit Statistik erlaubt es uns, auf die Konzepte zu schauen, die jeder Aktivität zugrunde liegen. Schüler können sich auf der anderen Seite nicht auf einen ausgiebigen Vorrat von Fähigkeiten oder Konzepten beziehen. Daher schauen Schüler gleichermaßen auf zentrale wie auf weniger bedeutungsvolle Charakteristika der Akti-

vitäten. Damit Simulationen ein effizientes Instrument sind, müssen Schüler die wichtigen von den weniger wichtigen Eigenschaften von Simulationsexperimenten unterscheiden können.

Ziel eines simulationsbasierten Unterrichts ist es, Schülern zu helfen, die begrifflichen und konzeptionellen Grundlagen von Statistik zu verstehen. Wir empfehlen dazu ein vierschrittiges Unterrichtsmodell. Es sollte jedoch bemerkt werden, dass diese Schritte für die Didaktik nicht neu sind. Die meisten sind tatsächlich alte, im Laufe der Zeit bewährte Techniken. Dennoch glauben wir, dass eine Kombination dieser Schritte die Effizienz von simulationsbasiertem Unterricht verbessert.

Als Erstes können vorbereitende Maßnahmen Schülern helfen, die wichtigen von eher unbedeutenden Eigenschaften einer Aktivität zu erkennen. Vor unserer Stichprobenaktivität z.B. sollte die Aufmerksamkeit der Schüler auf das Wesentliche der Aktivität gerichtet werden, d.h. die relative Nähe des Stichprobenmittel zum Populationsmittel und dabei die Beziehung zwischen Stichprobenumfang und Variabilität oder die Gesamtform der Stichprobenverteilung zu beobachten.

Als Zweites sollte eine informelle Auswertung und Rückmeldung eine integrale und ständige Komponente eines explorativen Prozesses sein: Während einer Aktivität im Klassenzimmer herumgehen und herauszufinden, was die Schüler lernen; mit den Schülern reden; Fragen stellen; Schüler ihre Begründungen erklären lassen; sie die wichtigsten statistischen Dinge erklären lassen, so wie sie sie sehen. Durch informelle Bewertungen können Lehrer auftauchende Fehlvorstellungen identifizieren und notwendige unterrichtliche Anpassungen vornehmen.

Drittens wirft die Tatsache, dass Schüler Fehlvorstellungen entwickeln können, ein Licht auf die Bedeutung von Zusammenfassungen und Kurzerklärungen: Am Ende jeder Aktivität lass Schüler ihre Ansichten und ihr Verstehen einander mitteilen; verstärke dabei angemessene Vorstellungen, baue teilkorrekte Ansichten weiter aus und kontrastiere angemessene Vorstellungen mit Fehlvorstellungen. In den meisten Fällen haben auch die Fehlvorstellungen eine logische Grundlage und entstehen aus einfachen Missverständnissen oder unangemessenen Ketten von Schlussfolgerungen. Wenn Schüler auf ihre Aktivitäten zurückschauen - und auf die Wurzeln ihres Verstehens, dann können unangemessene Vorstellungen offengelegt und korrigiert werden.

Schließlich können Follow-up Übungen das Verständnis der Schüler vertiefen und das Erinnern verbessern. Nach Hodgson und Borkowski's Aktivität zum Stichprobenziehen haben die Verfasser beispielsweise Lehrer ermutigt, die Zahl der Karten zu variieren, so dass es keinen Zusammenhang mehr zwischen Farbe und Wert der Karte gibt. Dann sammelten die Schüler einfache und geschichtete Stichproben und untersuchten die Ergebnisse. In diesem Fall führten geschichtete Stichproben zu ganz ähnlichen Schätzungen des Populationsmittels. Somit erlaubte die Erweiterung den Schülern ein vertieftes Verstehen des angemessenen Einsatzes jeder dieser Techniken.

## 6 Schlussfolgerungen

Auch wenn dieser Aufsatz mögliche Schwächen im Einsatz von Simulationen beim Statistikkernen benennt, ist dies keine Anklage von Simulationen oder anderen Schülerzentrierten Unterrichtsmethoden. Die Literatur der Mathematik- und Statistikdidaktik ist voll von Einsichten, die die Effizienz konstruktivistischen Lehrens betonen. Ein Statistikkunterricht, der Simulationen einsetzt, verspricht Schülern dabei zu helfen, ein konzeptionelles und nicht nur ein rein mechanisches Verstehen der Sache zu vermitteln. Neuere Forschung deutet jedoch darauf hin, dass simulationsbasierte Aktivitäten noch keine Garantie dafür bieten, dass Schüler das intendierte begriffliche Verstehen auch erlangen. Wenn eingesetzt in Verbindung mit angemessenen Einführungen, informellen Zwischenauswertungen, Zusammenfassungen und Follow-Up Aktivitäten sind Simulationen ein effizientes Instrument zum Lernen und Lehren von Statistik.

## Literatur

Garfield, J.B. und del Mas, R. (1989). Reasoning about chance events: assessing and changing students' conception of probability. In: C. Maher, G. Goldin und R.B. Davis (Hrsg), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 189-95. Rutgers, NJ: Rutgers University Press.

Garfield, J.B. und del Mas, R. (1994). Students' formal and informal understanding of statistical-power. Paper presented at the Fourth International Conference on Teaching Statistics, Marrakesh, Morocco.

Gnanadesikan, M., Scheaffer, R.L., Watkins, A.E., und Witmer, J.A. (1997). An activity-based statistics course. *Journal of Statistics Education*, **5** (1).

Hodgson, T. (1996). The effects of hands-on activities on students' understanding of selected statistical concepts. In: E. Jakubowski, D. Watkins und H. Biske (Hrsg), *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 241-6. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Hodgson, T. und Borbowski, J.J. (1998). Warum geschichtete Stichproben? *Stochastik in der Schule*, **19**(2), 32 - 41

Oursland, M. (1997) *Comparing the Cognitive Differences Resulting from Modeling Instruction: Using Computer Microworld and Physical Instruction to model Real-World Problems*. Unpublished doctoral dissertation, Montana State University, Bozeman, MT.

Romero, R., Ferrer, A., Capilla, C., Zunica, L., Balasch, S., Serra, V. und Alcover, R. (1995). Teaching statistics to engineers: an innovative pedagogical experience. *Journal of Statistics Education*, **3**(1).

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In: D. Grouws (Hrsg.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 465-94. New York: Max Millan Publishing.

Sullivan, M.M. (1995). Development of conceptual understanding in descriptive statistics. In: D.T. Owens, M.K. Reed and G.M. Millsaps (Hrsg.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, S. 338. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for science, Mathematics and Environmental Education.

Well, A.D., Pollatsek, A. und Boyce, S.J. (1990). Understanding the effects of sample size on the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, **47**, 289-312.

Anschrift der Verfasser  
 Ted Hodgson und Maurice Burke  
 Department of Mathematical Sciences  
 Montana State University  
 Montana, USA

hodgson@mathfs.math.montana.edu