# Summenformeln für die geometrischen Reihen 1. und 2. Art

GUNTER STEIN, DARMSTADT

***Leserbrief:*** *In dem Beitrag von Hans Humenberger: Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen, Stochastik in der Schule 20(2000) Heft 3, werden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Potenzreihen berechnet, so dass Verbindungen zwischen Stochastik- und Analysisunterricht möglich sind. Dabei sollte man allerdings bedenken, dass schon etwas anspruchsvollere Fragestellungen (z.B. unsymmetrische Münzwürfe) auf Reihen führen, für die keine Summenformeln bekannt sind.*

Wenn im Analysisunterricht keine Potenzreihen behandelt wurden, besteht die Möglichkeit, die Summenformeln für die geometrische Reihen 1. und 2. Art mit Hilfe stochastischer Überlegungen herzuleiten, und zwar durch folgende Überlegungen:

Das Glücksrad wird so lange gedreht, bis die Eins erscheint.

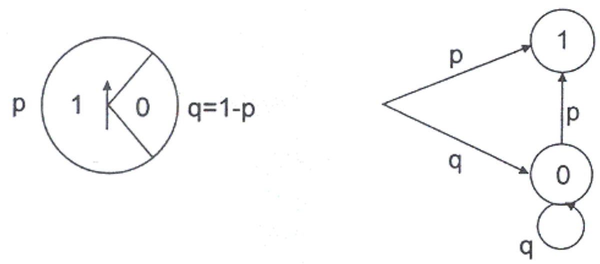


Fig.

Da die Eins sicher irgendwann einmal erscheint, ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen zum einen 1, zum anderen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p + qp + q^2 p + q^3 p + \ldots = (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)p$$

also

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-q}$$

Die Wartezeit für die Eins ist zum einen $\frac{1}{p}$, denn bei n Drehungen erscheinen $n \cdot p$ Einsen, so dass die Wartezeit $\frac{n}{n \cdot p} = \frac{1}{p}$. ist.

Andererseits ist die Wartezeit

$$1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2 p + 4 \cdot q^3 p + \ldots = p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots)$$

Also gilt

$$1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + 4 \cdot q^3 + \ldots = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Die Wartezeit für eine Doppeleins kann nur für $p = \frac{1}{p}$ mit Hilfe von Fibonacci-Zahlen bestimmt werden.

Für den allgemeinen Fall gilt für die Wartezeit $m$ von zwei Einsen

$$m = \frac{1}{p} + p \cdot 1 + q \cdot (1 + m)$$

in Worten: Für die erste Eins braucht man $\frac{1}{p}$ Drehungen, danach macht man entweder mit Wahrscheinlichkeit $p$ noch eine Drehung oder mit Wahrscheinlichkeit $q$ noch $1 + m$ Drehungen.

Hieraus folgt

$$m = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \quad (= 6 \text{ für } p = \frac{1}{2})$$

Eingegangen am 29. Januar 2001

Prof. Dr. Gunter Stein
Fachbereich Mathematik Arbeitsgruppe 11
Schloßgartenstraße 7 64289 Darmstadt
stein496@aol.com