Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz - Das „Drei-Türen-Problem"

SILKE ATMACA UND STEFAN KRAUSS

Zusammenfassung

> „Kleinere sprachliche Veränderungen können sich in beachtlicher Weise auf die Lösungsrate von Textaufgaben auswirken."
>
> Stern 1997, S. 408

Mathematikunterricht ist zu einem großen Teil Problemlöseunterricht. Der große Einfluss von Aufgabenformulierung und Erklärungshilfen auf den Lernerfolg und die Problemlösefähigkeit sind aber auch genuiner Untersuchungsgegenstand der Kognitionspsychologie. Im Bereich des stochastischen Denkens wurden in letzter Zeit bei dem Versuch, Bayesianische Aufgabenstellungen auf eine verständliche Art zu formulieren, wichtige Fortschritte erzielt (siehe z.B. Wassner, Krauss & Martignon, 2001). Anhand des berühmten „Drei-Türen-Problems" (auch: „Ziegenproblem" oder „Monty-Hall-Dilemma") zeigen wir exemplarisch neueste Ansätze, wie man kognitionspsychologische Erkenntnisse für den Stochastikunterricht nutzbar machen kann. Eine ausführlichere (englische) Darstellung dieses Artikels findet sich in Krauss und Wang (2001).

Einleitung

> „Der Schwierigkeitsgrad der in Text eingekleideten mathematischen Aufgaben wird nicht durch die zugrundeliegende Gleichung determiniert, wie die meisten Lehrer annehmen. Vielmehr konnte bei einfachen Arithmetikaufgaben, bei Algebraaufgaben und bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt werden, dass in Bezug auf die ihnen zugrundeliegende Gleichung isomorphe Aufgaben sich vehement in ihrem Schwierigkeitsgrad unterscheiden können."
>
> Stern 1997, S. 406

Es ist keine neue Erkenntnis, dass Instruktionen und Aufgabenformulierungen eine große Rolle bei der Vermittlung von Einsicht spielen. Aber worauf kommt es dabei in Hinblick auf die Stochastik im Einzelnen an? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zunächst den Blick auf die Kognitionspsychologie richten.

Die Kognitionspsychologie umfasst Bereiche wie z.B. Wahrnehmung, Gedächtnis, Lernen und Motivation. Untersucht werden dabei Phänomene wie Intelligenz, Kreativität, Denken und Problemlösen. Es handelt sich also um eine Richtung der Psychologie, die zur Vermittlung von Lehrstoff und der Darstellung mathematischer Probleme bzw. Aufgaben viel beitragen kann.

Das Drei-Türen-Problem ist in der kognitiven Psychologie eine beliebte Kopfnuss, da es Aufschluss über mögliche Fehler beim Problemlösen gibt und erhellen kann, wie sich Veränderungen der Problemstellung auf die Lösefähigkeit auswirken können. In diesem Artikel legen wir dar, wie sich solche Erkenntnisse didaktisch nutzbar machen lassen. Beginnen wir mit einem kurzen Überblick über die Geschichte dieses Problems.

Das Drei-Türen-Problem

Das Drei-Türen-Problem geht ursprünglich auf eine Spielshow namens „Let's Make a Deal" zurück. Die Kandidaten dieser US-amerikanischen TV-Show mit dem Moderator Monty Hall sahen sich mit einer Situation konfrontiert, in der sie sich entscheiden mussten, ob sie bei einer bereits getroffenen Wahl bleiben oder zu einer Alternative wechseln wollten. 1991 wurde das Drei-Türen-Problem in einem Leserbrief in der US-Zeitschrift *Parade* in der Kolumne „Ask Marilyn" thematisiert (deutsche Übersetzung aus von Randow, 1993):

> Sie nehmen an einer Spielshow teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator (Monty Hall) weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: „Bleiben Sie bei Tür Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei?"
>
> (Diese Version des Drei-Türen-Problems wollen wir im Folgenden *Standardversion* nennen.)

Nachdem die Autorin der Kolumne, Marilyn vos Savant[1], geantwortet hatte, dass es für den Kandidaten von Vorteil wäre, seine ursprüngliche Wahl zu verwerfen und stattdessen zur Alternative (Tür 2) zu wechseln, entflammte eine öffentliche Debatte, die sich rasch nach Europa ausdehnte und bis

---

[1] Marylin vos Savant hat im Guiness-Buch der Rekorde von 1991 einen Eintrag als der Mensch mit dem höchsten jemals gemessenen IQ (= 228).

heute die Gemüter erhitzt. Artikel zum „Drei-Türen-Problem“ gab es im *Spiegel* (19. August 1991), in der *Zeit* (19. Juli 1991) oder – sogar als „front-page story“ – in der *New York Times* (21. Juli 1991).
Marilyn vos Savants Antwort war kontraintuitiv. Viele Leser brachten ihre entgegengesetzte Meinung in teilweise beleidigenden und wütenden Leserbriefen zum Ausdruck (für eine Sammlung der interessantesten von etwa 10.000 (!) Leserbriefen siehe vos Savant, 1997). Der größte Teil dieser Leserbriefschreiber meinte, es sei egal, ob der Kandidat wechsle oder bliebe, da ihm noch zwei Alternativen zur Wahl stünden und die Chancen in beiden Alternativen gleich seien. Diese Leser übersahen jedoch die Information, die ihnen die geöffnete Tür lieferte. Im Prinzip steht der Kandidat nämlich vor der Wahl, bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben (Gewinnwahrscheinlichkeit nach wie vor 1/3) oder sich für die *beiden anderen* Türen zu entscheiden (Gewinnwahrscheinlichkeit 2/3). Für eine Sammlung verschiedener Lösungsmöglichkeiten siehe von Randow (1993).
Das Drei-Türen-Problem wurde auch schnell in mathematischen Zeitschriften thematisiert. In der Zeitschrift *Stochastik in der Schule* finden sich innerhalb eines kurzen Zeitraums nach Bekanntwerden des Problems vier Artikel zu diesem Thema (Borovcnik, 1991; Wollring, 1992; Diepgen, 1993; Klemisch, 1993). Besonders interessant sind die Berichte von Wollring und Klemisch, da in beiden Artikeln von Erklärungsversuchen gegenüber StudentInnen bzw. SchülerInnen berichtet wird. Wie hartnäckig sich die kognitive Illusion selbst nach verschiedenen Erklärungsansätzen (verschiedene Simulationsreihen mit Rollenspielen, Übertragung der Simulationsversuche in einen STIRLING-Rekorder und Betrachtung der mathematischen Lösung mit Hilfe eines Baumdiagramms) aufrecht erhält, wird deutlich, wenn Wollring schreibt: „Ein Rest von nur teilweise überzeugten Nichtwechslern blieb auch nach der Simulation bestehen." (Wollring 1992, S. 19) Er erklärt sich diese Befunde dadurch, „dass falsche Annahmen zunächst ein festes Vorurteil provozieren können." (Wollring 1992, S. 21)
Klemisch (1993) hat nach Wollrings Vorbild das Drei-Türen-Problem als experimentellen Einstieg in einen Stochastik-Leistungskurs gewählt. Hier ist besonders bemerkenswert, wie eine Schülerin, die das Problem spontan durchschaut hat, versucht, es ihren Mitschülern zu erklären: „Zu Beginn beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto hinter der gewählten Tür steht 1/3, dafür dass es hinter einer der anderen Türen steht, jedoch 2/3. Wenn von diesen beiden Türen eine ausscheidet, bleibt die Wahrscheinlichkeit für die gewählte Tür 1/3 (hier hat sich ja nichts verändert), folglich muss die Wahrscheinlichkeit für die andere Tür 2/3 betragen. In 2/3 aller Fälle ist also Wechseln besser als Nichtwechseln." (Klemisch 1993, S. 11f.)
Auch heute noch wird das Problem in mathematikdidaktischen Zeitschriften behandelt. Im letzten Heft von *Stochastik in der Schule* ist z.B. ein Artikel von Eisenhauer (2001) über das Monty-Hall-Problem zu finden (übersetzt aus *teaching statistics, 2000*). Eisenhauer beschreibt und verallgemeinert das Monty-Hall-Problem mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmatrizen. Warum wir wahrscheinlichkeitsbasierte Erklärungsansätze für didaktisch eher ungeeignet halten, wird im Folgenden noch erörtert werden.
Auch in nicht-mathematischen Zeitschriften lassen sich Artikel über das Drei-Türen-Problem finden. Die meisten Veröffentlichungen gibt es – neben der Mathematik – auf dem Gebiet der Psychologie, wo das Problem gar zum „großen Finale der kognitiven Illusionen“ avancierte (Piattelli-Palmarini, 1997). Doch sogar in ökonomischen und juristischen Zeitschriften wird das Problem gerne herangezogen, um zu belegen, dass menschliche Entscheidungen nicht immer den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgen (siehe z.B. *The Economist*, 20. Februar 1999, oder, für ein juristisches Beispiel, Steinke, 1994, *Der Beweiswert forensischer Gutachten*).

Rückschau - Bisherige kognitionspsychologische Experimente

Die erste umfassende experimental-psychologische Studie zum Drei-Türen-Problem stammt von Granberg und Brown (1995). Sie präsentierten 228 Versuchspersonen die Standardversion und fanden heraus, dass sich nur 13% ihrer Versuchspersonen für das bessere Wechseln entschieden.
An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es prinzipiell zwei verschiedene Arten gibt, experimentelle Untersuchungen zum Drei-Türen-Problem durchzuführen: Zum Einen kann man Versuchspersonen das Drei-Türen-Problem wie üblich als Textproblem präsentieren. Hat man „didaktische Ambitionen“ (d.h., will man eine höhere Wechslerrate erzielen), kann man versuchen, dabei eine möglichst „intuitive" Aufgabenformulierung zu finden. Zum anderen besteht die Möglichkeit, Versuchspersonen *wiederholt* mit dem Problem zu konfrontieren (z.B. mit Hilfe eines Computerprogramms) und ihnen nach jeder Entscheidung „feedback" über Gewinn oder Nicht-Gewinn des Autos zu geben. Die Idee bei dieser Art von Untersuchung („multiple-round simulation“) ist, dass die Versuchspersonen aus Erfahrung lernen sollen.

Granberg und Brown (1995) führten beiderlei Untersuchungen durch: Neben ihrer ersten Untersuchung (siehe oben) ließen sie eine weitere Gruppe von Versuchspersonen 50 Runden der Spielshow mit Hilfe einer Computersimulation durchspielen. Die durchschnittliche Wechslerrate in den letzten zehn Runden (55%) unterschied sich deutlich von der durchschnittlichen Wechslerrate in der ersten Runde (10%). Die Versuchspersonen hatten also durch „feedback" gelernt, öfter die richtige Entscheidung zu treffen. Natürlich sind 55% Wechseln während der letzten zehn Runden (jede Versuchsperson wechselte also durchschnittlich 5 - 6 mal) nicht optimal, denn die richtige Strategie wäre, *immer* zu wechseln.

Wir wollen uns im Folgenden auf Untersuchungen der ersten Art konzentrieren, da nur diese für das Formulieren von Textaufgaben Erkenntnisse bringen und somit von höherer Relevanz für den Schulunterricht sind[2]. Die Frage lautet also: Wie kann man die Aufgabenformulierung des Drei-Türen-Problems verändern, so dass dem Problemlöser die mathematische Grundstruktur transparent wird?

Einen Versuch in diese Richtung unternahmen Aaron und Spivey (1998) unter Verwendung des so genannten „Häufigkeitsansatzes". Um diesen Ansatz vorzustellen, unternehmen wir einen kurzen Ausflug zurück zu den Anfängen der psychologischen Urteilsforschung in den 70er Jahren.

Bezüglich der Frage, wie gut Menschen mit Wahrscheinlichkeiten umgehen, dominierte in der Kognitionspsychologie lange Zeit das Credo von Amos Tversky und Daniel Kahneman. In ihrem Buch „Judgment under uncertainty: Heuristics and biases" (1982) präsentierten sie eine Fülle von Aufgaben aus dem Bereich der Logik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei denen die menschliche Intuition systematisch vom korrekten Ergebnis abweicht. Mit der folgenden, auch aus dem Stochastikunterricht bekannten Aufgabe, zeigten sie experimentell, dass die Wahrscheinlichkeitsschätzungen von Versuchspersonen bei Bayesianischen Aufgaben unter bestimmten Umständen stark von der richtigen Lösung abweichen (Eddy, 1982):

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt 1%. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält, 80%. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält, 9,6%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung gegangen ist, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Testergebnis erhalten hat?

Obwohl man mit dem Satz von Bayes hier eine Wahrscheinlichkeit von 7,8% erhält, schätzten die meisten Versuchspersonen diese Wahrscheinlichkeit auf 70%-80%. Dass solche (als notorisch schwierig geltenden) Bayesianische Situationen dem menschlichen Denken aber nicht grundsätzlich verschlossen bleiben müssen, konnten Gigerenzer und Hoffrage (1995) zeigen. Sie wiesen darauf hin, dass in Bayesianischen Problemen wie der obigen Mammographieaufgabe das *Format* der Informationen eine entscheidende Rolle spielt. Sie ersetzten die (sowohl in der Schule als auch in der kognitionspsychologischen Forschung üblichen) Wahrscheinlichkeitsinformationen (z.B. „mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% hat eine Frau...") durch entsprechende Häufigkeitsinformationen (z.B.: „8 von 10 Frauen haben..."). Die Aufgabe lautete dann:

10 von 1.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs. Von den 10 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten 8 ein positives Testergebnis. Von den 990 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten 95 ein positives Testergebnis. Ihnen liegt eine repräsentative Stichprobe von Frauen vor, die zu einer Routineuntersuchung gegangen sind und dort einen positiven Befund erhalten haben. Wie viele dieser Frauen haben Brustkrebs?

In dieser Version wurde die Aufgabe deutlich besser gelöst. Auch stochastisch nicht-trainierte Versuchspersonen sehen nun, dass nur 8 von 103 Frauen (= 7,8%) in dieser Situation tatsächlich Brustkrebs haben. Da beide Aufgabenversionen bis auf das Format der Informationen identisch sind, kann die erhöhte Einsicht in der zweiten Version allein auf das Häufigkeitsformat zurückgeführt werden. Eine ausführliche Beschreibung dieses „Häufigkeitsansatzes" in der Stochastik findet sich in Wassner, Krauss und Martignon (2001).

Was hat der Häufigkeitsansatz nun mit dem Drei-Türen-Problem zu tun? Aaron und Spivey (1998) bezogen sich bei ihrem Versuch, das Drei-Türen-Problem intuitiv zu formulieren, in folgender Weise auf diesen Ansatz: Zuerst konstruierten sie eine Darstellung des Problems, die so weit wie möglich

[2] Simulationen sind als didaktisches Mittel auch deshalb problematisch, da die dadurch gewonnene Einsicht „man gewinnt durch Wechseln doppelt so oft" nicht notwendigerweise gleichbedeutend mit der Einsicht in die mathematische Struktur des Problems ist. Ein didaktischer Ansatz sollte auf jeden Fall auch Aufschluss liefern über die Frage, *warum* es besser ist zu wechseln.

auf mathematische Terminologien verzichtete. Wie Gigerenzer und Hoffrage (1995) übertrugen sie die gefragte Einzelfallwahrscheinlichkeit dann in absolute Häufigkeiten, indem sie ihre Versuchspersonen dazu animierten, sich -statt nur einer- 30.000 Spielshows dieser Art vorzustellen. Anschließend mussten die Versuchspersonen Verständnisfragen beantworten, wobei die Fragen der einen Gruppe in absoluten Häufigkeiten gestellt wurden und die der anderen Gruppe in Wahrscheinlichkeiten. Die Aufgabenformulierung in absoluten Häufigkeiten begann wie folgt: „Stellen Sie sich vor, Sie hätten 30.000 Spielrunden beobachtet, in denen der Kandidat zu Beginn jeder Runde Tür A gewählt hat. In wie vielen dieser 30.000 Runden ist das Auto tatsächlich hinter Tür A?" Es folgten weitere elf Fragen dieser Art; die letzte Frage schließlich war, ob es für den Kandidaten vorteilhaft sei, seine Erstwahl zu ändern (Aaron und Spivey 1998, S. 17). Tatsächlich gaben 29% der Versuchspersonen die korrekte Antwort auf Aaron und Spiveys Häufigkeitsfrage, während nur 12% die Wahrscheinlichkeitsformulierung lösten. Auch wenn bei diesem Ansatz die Zahl der Spielshows manipuliert wurde, besteht ein wesentlicher Unterschied zu den oben erwähnten „multiple-round simulations“, da bei Aaron und Spivey die Feedback-Komponente fehlt.

Statt die *Zahl der Runden* änderten Hell und Heinrichs (2000) die *Zahl der Türen* im Ziegenproblem. Sie griffen dabei eine Idee von Marylin vos Savant auf, die versucht hatte, die Leser folgendermaßen von der richtigen Lösung zu überzeugen: „Stellen Sie sich vor, es gäbe eine Million Türen und Sie wählen Tür 1. Daraufhin öffnet der Showmaster, der weiß, was sich hinter den Türen befindet, und es vermeidet, die Tür mit dem Preis zu öffnen, alle Türen außer der Tür Nummer 777.777. Sie würden sehr schnell zu dieser Tür wechseln, oder nicht?“ (vos Savant, 1997, S. 16). Hell und Heinrichs setzten 75 Versuchspersonen das herkömmliche Problem mit drei Türen vor, wovon sich – wie üblich – 13% für Wechseln entschieden. Dann konfrontierten sie 75 weitere Versuchspersonen mit einer Variante des Problems mit 30 Türen. Bei dieser Variante wechselten 65% der Probanden, was einer erheblichen Verbesserung des Verständnisses entspricht. Wir geben allerdings zu bedenken, dass es sich bei dem Drei-Türen-Problem mit 30 Türen grundsätzlich um ein *anderes* Problem handelt, das eigentlich „30-Türen-Problem“ heißen müsste. Öffnet der Moderator bei Hell und Heinrichs′ Aufgabe mit 30 Türen zum Beispiel alle Türen außer der Erstwahl (Tür 1) und Tür 17, ist der Gedanke, dass er für das Nichtöffnen von Tür 17 vielleicht einen Grund hatte, wesentlich nahe liegender als beim Drei-Türen-Problem. Unser Ziel ist es aber, genau das Problem mit *drei Türen* so zu formulieren, dass die richtige Lösung intuitiv gefunden werden kann. Wir wollen also weder die *Zahl der Runden* noch die *Zahl der Türen* manipulieren.

Gibt es eine „intuitive“ Formulierung für das Drei-Türen-Problem?

In unserem Ansatz, das Drei-Türen-Problem verständnisfördernd zu formulieren, bedienten wir uns der folgenden kognitionspsychologischen Konzepte. Während die Konzepte 2, 3 und 4 neu in der Forschung um das Drei-Türen-Problem sind, lernten wir Konzept 1 bereits kennen, allerdings in etwas anderer Form:

Psychologisches Konzept 1: „Häufigkeitsansatz"

Zum Ersten verwendeten wir – in Anlehnung an die Ergebnisse von Gigerenzer und Hoffrage (1995) – in unserer Fragestellung absolute Häufigkeiten. Doch im Gegensatz zu Aaron und Spivey (1998) animierten wir unsere Versuchspersonen nicht, sich 30.000 Gameshows vorzustellen, sondern wir fragten nach den 3 verschiedenen Konstellationen hinter den 3 Türen (das Auto kann hinter Tür 1, 2 oder 3 sein). Die abschließende Frage in unserer Version lautete:

In wie vielen der 3 möglichen Konstellationen würde der Kandidat bei dieser Spielshow das Auto gewinnen,

- wenn er bei seiner ersten Wahl (Tür 1) bleibt?
in ____ von 3

- wenn er zur letzten noch verbleibenden Tür wechselt? *in ____ von 3*

Was sollte der Kandidat also tun?
___ bleiben *___ wechseln*

Durch Konzept 1 werden die Versuchspersonen dazu animiert, eine Häufigkeitsantwort (z.B. „in 2 von 3 Fällen“) statt einer Wahrscheinlichkeitsantwort zu geben.

Psychologisches Konzept 2: „Mentale Modelle"

Das zweite Konzept baut auf einer Theorie von Johnson-Laird (1983) über menschliches Problemlösen auf. Johnson-Laird stellte die These auf, dass Menschen sogenannte „Mentale Modelle" zur Lösung von logischen und probabilistischen Problemen bilden. Damit ist gemeint, dass Menschen sich bei dem Versuch, den Wahrheitsgehalt logischer oder probabilistischer Aussagen zu überprüfen, konkrete Einzelfälle dieser Aussagen vorstellen (siehe Abb. 1). Fragt man explizit nach solchen „Modellen“, werden Versuchspersonen diese wahrscheinlich zur Lösung aufgreifen. Durch den der Frage vorgeschalteten Satz „es gibt drei Türen, hinter denen das Auto versteckt sein kann" animierten wir unsere Versuchspersonen, die folgenden „Mentalen Modelle" zu betrachten.

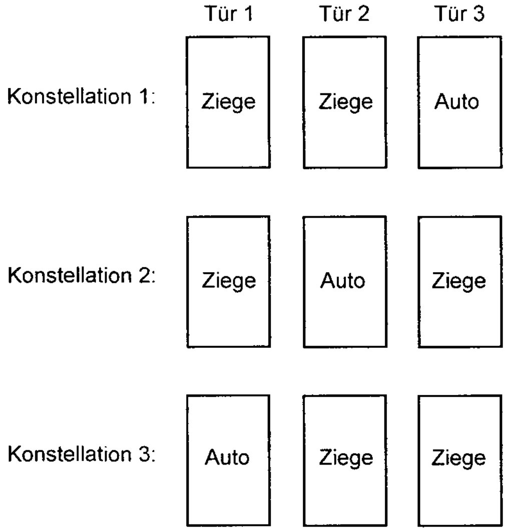

Abbildung 1

Durch die anschließende Häufigkeitsfrage „In wie vielen der 3 möglichen Konstellationen würde der Kandidat bei dieser Spielshow das Auto gewinnen, wenn er bei seiner ersten Wahl (Tür 1) bleibt bzw. wenn er zur letzten noch verbleibenden Tür wechselt?" (siehe Konzept 1) sollten die Versuchspersonen animiert werden, diese 3 Konstellationen im Geiste durchzuspielen (siehe Abb. 2). So lässt sich feststellen, welche Tür Monty Hall in welcher Konstellation öffnen würde und ob der Kandidat daraufhin durch Wechseln oder Bleiben gewinnen würde.

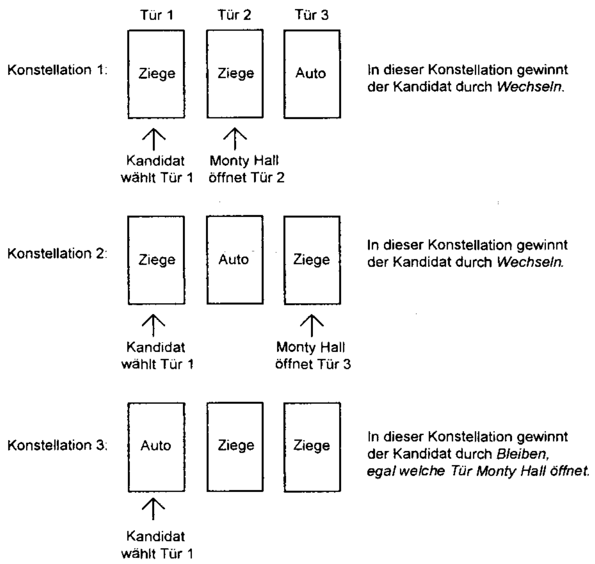

Abbildung 2

Diese drei Mentalen Modelle verbildlichen genau den Gedanken „in zwei von drei möglichen Konstellationen gewinnt der Kandidat das Auto durch Wechseln" (nämlich in den Konstellationen 1 und 2). Der Trick, der es erlaubt, das Drei-Türen-Problem mit nur 3 Mentalen Modellen zu lösen[3], besteht darin, dass wir uns, im Gegensatz zur Standardversion, *nicht festlegen, welche Tür Monty Hall öffnet.* In der Standardversion wird der Problemlöser angehalten, sich vorzustellen, dass Monty Hall Tür 3 öffnet („...mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, *zum Beispiel Nummer drei,* und eine Ziege schaut ins Publikum..."). Ein Löser, der daraufhin Tür 3 als definitiv geöffnet sieht (eine Befragung von Probanden ergab, dass dies 87% tun), kann nun in Abbildung 1 nur noch auf die Konstellationen 2 und 3 zurückgreifen. Konstellation 1 wird unmöglich, da Monty Hall Tür 3 ja bereits geöffnet hat. Erst wenn man den Hinweis auf die von Monty Hall geöffnete Tür in der Aufgabenformulierung weglässt, wird es möglich, das Problem im Sinne von Abbildung 2 zu lösen. Der entscheidende Punkt ist also, die Modelle *vor* dem Öffnen des Moderators zu erstellen. Dies führt uns zum nächsten psychologischen Konzept, dem „weniger ist mehr"-Effekt.

Psychologisches Konzept 3: „weniger ist mehr"

Unter dem „weniger ist mehr"-Effekt versteht man das Phänomen, dass bei fehlenden Informationen oder dem Ignorieren von bestimmten Teilinformationen unter bestimmten Umständen bessere Entscheidungen getroffen werden. Goldstein und Gigerenzer (1999) fragten beispielsweise sowohl amerikanische als auch deutsche Versuchspersonen, welche Stadt größer sei, „San Diego" oder „San Antonio". Überraschenderweise beantworteten mehr der deutschen Versuchspersonen (nämlich 100%!) diese Frage korrekt: „San Diego". Warum? Die meisten der deutschen Versuchspersonen kannten „San Antonio" gar nicht, und allein aus dieser Tatsache schlossen sie, „San Diego" müsse die größere Stadt sein. Die Amerikaner kannten beide Städte, und das Wissen um San Antonio verunsicherte sie bei ihrer Entscheidung. Der „weniger ist mehr"-Effekt kann bei verschiedensten Aufgaben und aus kognitionspsychologisch völlig unterschiedlichen Gründen auftreten (mehr dazu findet sich bei Krauss & Wang, 2001).

Dass weniger Wissen zu besseren Urteilen führen kann, trifft – allerdings in anderer Form als bei der

[3] Interessanterweise verwendeten sowohl Marilyn vos Savant (1997) als auch Johnson-Laird et al. (1999) zur Visualisierung des Drei-Türen-Problems *sechs* Mentale Modelle. Leider hat keiner von beiden die Auswirkungen dieser sechs Mentalen Modelle auf die Einsicht eines Problemlösers experimentell überprüft.

Städtefrage – auch auf das Drei-Türen-Problem zu. Hier ist es entscheidend, ob die Probanden darüber in Kenntnis gesetzt werden, welche Tür Monty Hall öffnet. Sobald man ihnen diese Information zuteil werden lässt (wie in der Standardversion), ist es nicht mehr möglich, die drei Mentalen Modelle (siehe Abb. 1) zu bilden. In unserer Aufgabenformulierung spezifizierten wir deshalb *nicht*, welche Tür Monty Hall öffnet, sondern verwendeten in unserem Experiment die folgende Formulierung: „Monty Hall öffnet nach der Erstwahl des Kandidaten *eine andere* Tür und zeigt eine Ziege."

Psychologisches Konzept 4: „Perspektivenwechsel"

Die Bildung Mentaler Modelle wurde den Versuchspersonen noch entscheidend durch ein viertes psychologisches Konzept erleichtert, nämlich durch einen Perspektivenwechsel: Die Versuchspersonen wurden in unserer Aufgabenformulierung instruiert, sich anstatt in die Rolle des Kandidaten in die Rolle des Showmasters zu versetzen („Stellen Sie sich vor, Sie sind der Moderator dieser Spielshow"). Durch den „Blick hinter die Kulissen" fällt es leichter, sich alle möglichen Konstellationen und die daraus resultierenden Gewinnmöglichkeiten vorzustellen. Theoretisch sehr interessant ist der Zusammenhang dieses Perspektivenwechsels mit der Struktur des Satzes von Bayes. Nimmt man an, dass der Kandidat auf Tür 1 gedeutet hat und der Moderator Tür 3 geöffnet hat (M_3), erhält man mit der Bayesformel die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 2 steht (A_2) wie folgt:

$$p(A_2 \mid M_3) = \frac{p(M_3 \mid A_2) \cdot p(A_2)}{p(M_3 \mid A1) \cdot p(A_1) + p(M_3 \mid A_2) \cdot p(A_2) + p(M_3 \mid A_3) \cdot p(A_3)} = \frac{2}{3}$$

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass das Auto hinter Tür 2 steht (gegeben der Moderator öffnet Tür 3), betrachtet man also die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Moderator Tür 3 öffnet (z.B. gegeben das Auto steht hinter Tür 2). Da die Bedingung in $p(A_2|M_3)$ die Handlung des Moderators ist, beinhaltet der Lösungsalgorithmus „Satz von Bayes“ also die Einnahme der Perspektive des Moderators.

Experiment

Wir legten 68 Versuchspersonen eine Version des Drei-Türen-Problems vor, die alle oben dargestellten Ansätze, nämlich Häufigkeitskonzept, Mentale Modelle, „weniger ist mehr"-Effekt und Perspektivenwechsel, vereinigte (gekürzte Version, die genaue englische Aufgabenformulierung findet sich in Krauss und Wang, 2001).

Stellen Sie sich bitte vor, Sie sind Monty Hall und Sie wissen, wo das Auto sich befindet. Der Kandidat deutet nun auf Tür Nummer 1. Sie öffnen daraufhin den Regeln entsprechend eine andere Tür und zeigen dem Kandidaten eine Ziege. Nun fragen Sie ihn, ob er bei seiner alten Wahl (Tür 1) bleiben will oder ob er zur letzten noch verbliebenen Tür wechseln will.

Es gibt *drei Türen*, hinter denen das Auto versteckt sein kann. In wie vielen dieser 3 möglichen Konstellationen würde der Kandidat nach Ihrem Öffnen einer „Ziegentür" das Auto durch Bleiben und in wie vielen Fällen durch Wechseln gewinnen?

Was sollte der Kandidat also tun?

___ bleiben oder ___ wechseln

Diese Version nannten wir „intuitive Version". Außerdem testeten wir eine Kontrollversion mit weiteren 102 Versuchspersonen, die aus einer umformulierten Standardardversion bestand, die sich nur durch das Fehlen der erwähnten vier psychologischen Konzepte von der intuitiven Version unterschied. Tabelle 1 fasst die Ergebnisse unseres Experiments zusammen:

	Kontroll-version	**Intuitive Version**
Perspektive	Kandidat	Monty Hall
Wird ein Hinweis gegeben, welche Tür Monty Hall öffnet?	ja	nein
Werden die 3 „Mentalen Modelle" explizit erwähnt?	nein	ja
Häufigkeitsfrage	nein	ja
Entscheidungen zu wechseln	22%	55 %

Tabelle 1

Bei der Kontrollversion entschieden sich nur 22% der Versuchspersonen für eine Änderung ihrer Erstwahl. Mit der „intuitiven Version" erreichten wir eine Wechslerrate von 55%. Dies ist eine erstaunliche Zahl, wenn man bedenkt, dass das Ziegenproblem äußerst resistent gegen Erklärungsversuche ist (siehe vos Savant, 1997, oder Piattelli-Palmarini, 1997).

Schlussbemerkungen

In der Tat kann man eine noch bessere Performanz der Versuchspersonen erreichen, wenn man Abbildung 2 als Erklärungsprototyp verwendet. In diesem Fall will man nicht den Problemlöseprozess der Versuchsperson lenken, sondern man legt Probanden diesen Lösungsweg explizit vor und testet danach andere, ähnliche Aufgaben, wie z.B. das Monty-Hall-Problem mit vier Türen oder das verwandte 3-Gefangenen-Dilemma[4]. Diese und weitere Untersuchungen, wie zum Beispiel ein separater Einsatz der erwähnten psychologischen Konzepte beim Drei-Türen-Problem[5], können in Krauss und Wang (2001) nachgelesen werden. Zusammengenommen legen unsere Befunde nahe, dass das erfolgreiche Lösen von Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur eine Frage von Intelligenz, Wissen und Fleiß ist, sondern auch ganz entscheidend von der Art abhängt, wie das Problem dem Schüler präsentiert wird.

In der Kognitionspsychologie wird immer wieder festgestellt, dass kleine Änderungen in der Problemformulierung große Auswirkungen auf die Leistung von Versuchspersonen haben können. Gerade bei der Verbalisierung von Unsicherheit - also in der Stochastik - können Alternativformulierungen und Hilfestellungen eines Problems den entscheidenden Schritt in Richtung Verständnis bringen. Zur Verdeutlichung wollen wir abschließend demonstrieren, wie man zwei der in diesem Artikel vorgestellten Konzepte, nämlich das Häufigkeitskonzept und den Perspektivenwechsel auf eine weitere stochastische Kopfnuss, das „3-Karten-Problem" anwenden kann:

> In einem Hut befinden sich drei Karten. Eine ist auf beiden Seiten schwarz, eine ist auf beiden Seiten weiß und eine ist auf einer Seite schwarz und auf der anderen Seite weiß. Eine Karte wird zufällig so gezogen, dass man nur eine Seite sehen kann. Diese Seite ist schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es die schwarz-schwarze Karte ist?

Die Bayes Formel liefert:

$$p(SK \mid SS) = \frac{p(SS \mid SK) \cdot p(SK)}{(SS \mid SK) \cdot p(SK) + (SS \mid \overline{SK}) \cdot p(\overline{SK})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

(SK steht für das Ereignis „schwarz-schwarze Karte", SS steht für die Bedingung „eine schwarze Seite ist zu sehen")

Laut der Formel von Bayes bedeutet Perspektivenwechsel nun in diesem Kontext, in der Aufgabenstellung nicht nach der schwarz-schwarzen *Karte* zu fragen, sondern nach der/den sichtbaren schwarzen *Seite(n)*, also vom Ereignis „Karte" in der Frage zur Bedingung „Seite" zu wechseln. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsfrage "Wie wahrscheinlich ist es, dass die andere Seite auch schwarz ist, wenn eine schwarze Seite zu sehen ist?" kann man nun zwanglos in Häufigkeiten formulieren. Sie lautet jetzt: „Bei wie vielen der 3 nun möglichen schwarzen Seiten ist die andere Seite auch schwarz?" Während die Originalversion nur von 7% der Versuchspersonen korrekt beantwortet wurde (Bar-Hillel und Falk, 1982), gaben bei unserer Version 43% der Versuchspersonen die richtige Antwort („bei 2 von 3 der schwarzen Seiten", Wassner & Krauss, 2001). Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Verbesserung des probabilistischen Denkens durch Perspektivenwechsel und Häufigkeitskonzept nicht auf den Kontext von handelnden Subjekten beschränkt (wie Moderator und Kandidat), sondern sich durchaus auch im breiterem Rahmen anwenden lässt.

Literatur

Aaron, E. & Spivey, M. (1998). Frequency vs. probability formats: Framing the three doors problem. In M. A. Gernsbacher & S. J. Derry (Hrsg.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 13-18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bar-Hillel, M. & Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11,* 109-122.

Borovcnik, M. (1991). Problemecke. *Stochastik in der Schule.* 11, Heft 3, S. 46-51

Der Spiegel (19. August 1991). Schönheit des Denkens, 34, S. 212-213.

Diepgen, R. (1993). Wahrscheinlichkeit und Rationalität. *Stochastik in der Schule.* 13, Nr. 2, S. 13-20.

Die Zeit (1991, July 19). *Eine überzeugende Logik, 34,* S. 58.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* 249-267. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Eisenhauer, J.G. (2001). Die Monty Hall Matrix. *Stochastik in der Schule, 21, 2,* 11-15.

Eisenhower, J.G. (2000). The Monty Hall Matrix. *Teaching Statistics, 22, 1,* 17-20.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition, 43,* 197-223.

[4] Wissenswertes zum 3-Gefangenen-Dilemma findet sich bei Falk (1992).

[5] Obwohl die vier Konzepte relativ stark miteinander verbunden sind, lassen sie sich doch zumindest teilweise auch separat untersuchen. Erstaunlicherweise stellt sich dabei z.B. heraus, dass die äußerst mächtig wirkende Häufigkeitsfrage ohne einen gleichzeitigen Einsatz des Perspektivenwechsels nahezu wirkungslos bleibt.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review.* 102, S. 684-704.
Goldstein, D.G. & Gigerenzer, G. (1999). The recognition heuristic: How ignorance makes us smart. In G. Gigerenzer, P.M. Todd, & the ABC Research Group, *Simple heuristics that make us smart* (S. 37-58). New York: Oxford University Press.
Granberg, D. & Brown, T. A. (1995). The Monty Hall Dilemma. *Personality and social psychology bulletin, 21,* 711-723.
Hell, W. & Heinrichs, C. (2000). Das Monty Hall Dilemma (Ziegenproblem) mit 30 Türen. In: D. Vorberg, A. Fuchs, T. Futterer, A. Heinecke, U. Heinrichs, U. Mattler, S. Töllner (Hrsg.): *TeaP 2000 - Experimentelle Psychologie.* Pabst Science Publishers.
Jahnke, T. (1997). Drei Türen, zwei Ziegen und eine Frau. *Mathematik lehren / Heft 85.*
Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models: Towards a cognitive science of language, inference and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.
Johnson-Laird, P.N., Legrenzi, P., Girotto, V., Legrenzi, M.S. & Caverni, J.P. (1999). Naive Probability: A Mental Model Theory of Extensional Reasoning. *Psychological Review, 106,* 62-88.
Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge, England: Cambridge University Press.
Klemisch, I. (1993). Ein Einstieg über das Drei-Türen-Problem. *Stochastik in der Schule. 13, 1,* S. 9-14.
Krauss, S. & Wang, X.T. (2001). The Psychology of the Monty Hall Problem: Overcoming Difficulties in Solving a Tenacious Brain Teaser. Arbeitsmanuskript, erscheint voraussichtlich 2002 in *Journal of Experimental Psychology* (sollte das Manuskript noch nicht publiziert sein, kann es gerne bei einer der unten angeführten email-Adressen angefordert werden)
New York Times (1991, July 21). *Behind Monty Hall's doors: Puzzle, debate and answer?* 20, S. 1.
Piattelli-Palmarini, M. (1997). *Die Illusion zu wissen. Was hinter unseren Irrtümern steckt.* science sachbuch rororo.
Stern, E. (1997). Mathematik. In: F.E. Weinert (Hrsg.): *Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich D: Praxisgebiete, Serie I: Pädagogische Psychologie, Band 3: Psychologie des Unterrichts und der Schule.* Hogrefe-Verlag Göttingen.
Steinke, W. (1994): Der Beweiswert forensischer Gutachten, in: NStZ, 1994, Heft 1, 17-21.
von Randow, G. (1993). *Das Ziegenproblem.* science sachbuch rororo.
vos Savant, M. (1997). *The Power of Logical Thinking.* St. Martin´s Press, New York.
Wassner, C. & Krauss, S. (im Druck). Häufigkeitsrepräsentationen im Stochastikunterricht - Zählen und Verstehen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001.* Franzbecker: Hildesheim.
Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2001). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? *Praxis der Mathematik, Heft 5.*
Wollring, B. (1992). Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. *Stochastik in der Schule.* 12 (1992), Nr. 3, S. 2 – 25.

Anschrift der Verfasser:
Silke Atmaca
Stefan Krauss
Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Lentzeallee 94
14195 Berlin
{atmaca;krauss}@mpib-berlin.mpg.de