Plausibilisierung zahlentheoretischer Erkenntnisse mittels elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung

UWE FISCHER, BAD BERLEBURG

Zusammenfassung: *So einfach sich zahlentheoretische Probleme oft formulieren lassen, so schwierig sind andererseits meist zugehörige Beweise, weshalb dieser interessante Zweig der Mathematik im Schulunterricht nur eine geringe Rolle spielt. Deshalb soll hier in Anlehnung an [1] der Versuch unternommen werden, mit schulmathematischen Mitteln unter Verwendung eines naiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs Plausibilitäten für wesentliche zahlentheoretische Erkenntnisse herzuleiten. Da diese Überlegungen meist zu quantitativen Aussagen führen, können diese mit Computerhilfe leicht bis in den sechs- bis neunstelligen Bereich (oder gar darüber hinaus) überprüft werden.*
Diese "experimentelle" Untersuchung zahlentheoretischer Fragestellungen durch Kombination von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Analysis und der Informatik sollte sich zu disziplinübergreifenden Wiederholungen, zur Behandlung in Arbeitsgemeinschaften, aber auch zur Themengewinnung für Facharbeiten eignen.

0 Gliederung

1 Primzahlen

Primzahlen sind natürliche Zahlen größer oder gleich 2, die sich nur durch 1 und sich selbst ganzzahlig ohne Rest teilen lassen. Anders ausgedrückt: Primzahlen sind natürliche Zahlen mit genau zwei natürlichen Teilern.

Die Primzahlfunktion $P(z)$ [in der Literatur auch mit $\pi(z)$ bezeichnet] gibt für natürliche (oder auch reelle) Zahlen z die Anzahl der Primzahlen $\leq z$ an. So ist z.B. $P(10) = 4$, $P(100) = 25$, $P(1000) = 168$, $P(10000) = 1229$.

Man erkennt hieran, dass die Anzahl der Primzahlen bis zu einer Zahl z offenbar unterproportional anwächst. Anders ausgedrückt: die Primzahlen werden mit wachsender Größe „seltener" oder die „Dichte" der Primzahlen, d.h. der Quotient aus der Anzahl der Primzahlen in einem (nicht zu kleinen) Intervall dividiert durch die Anzahl aller natürlichen Zahlen in diesem Intervall nimmt mit der Verschiebung des Intervalls zu größeren Zahlen hin im Allgemeinen ab. Da sich dieser Dichtebegriff nicht als Grenzwert (für Länge eines Intervalls um x gegen 0) präzisieren lässt, werden wir von „Dichte in der Gegend von x" statt „Dichte an der Stelle x" sprechen.

Die Primzahlfunktion $P(z)$ lässt sich bis heute exakt nur durch Abzählen aller Primzahlen bis z ermitteln, so dass sich die Frage nach Näherungsfunktionen für P stellt. Eine solche Näherung ist etwa durch den Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(z) \approx \int_2^z \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ gegeben [3].

Diese Näherung mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen zu plausibilisieren ist eines der Anliegen des ersten Kapitels.

1.1 Primzahlen und Wahrscheinlichkeit

Primzahlen sind gemäß Definition *nicht* durch einen Zufallsprozess entstanden und deshalb grundsätzlich *nicht* für wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen geeignet. Wenn man ihre Verteilung jedoch mit Hilfe eines zufallsgesteuerten Simulationsalgorithmus’ möglichst genau annähert, darf man hoffen, dass hieraus ableitbare Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte auch ziemlich genau die entsprechenden realen Primzahldichten und -anzahlen annähern.

Artur Engel simuliert zu diesem Zweck das Sieb des Eratosthenes durch folgenden „Algorithmus mit derselben Siebintensität“ [1]:

„1. Setze p = 2.

2. Streiche jede Zahl hinter p mit der Wahrscheinlichkeit 1/p .

3. Setze p = der ersten nicht gestrichenen Zahl hinter p und gehe nach 2.“

Für die Wahrscheinlichkeit, dass nach diesem Algorithmus die Zahl $n > 2$ nicht gestrichen und somit „Zufallsprimzahl“ wird, ergibt sich dann (nach [1]) die Rekursionsformel:

1.1-1 $$p_n = p_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{p_{n-1}}{n-1}\right), \qquad p_2 = 1$$

oder halbexplizit:

1.1-2 $$p_n = \left(1 - \frac{p_2}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_3}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{p_{n-1}}{n-1}\right).$$

Mit der Zufallsgröße (Indikatorfunktion)

$$X_i := \begin{cases} 1, \text{falls } i \text{ Zufallsprimzahl wird} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich für deren Erwartungswert $E(X_i) = p_i$. Für die Anzahl der Zufallsprimzahlen bis zur Zahl z folgt mit $S_z := X_2 + X_3 + \ldots + X_z$ der Erwartungswert:

1.1-3 $$E(S_z) = \sum_{i=2}^{z} p_i \,.$$

Diese Erwartungswerte fallen jedoch, wie auch ein Rechnertest zeigt, im Vergleich mit der anzunähernden Primzahlfunktion P systematisch um bis etwa 20% zu niedrig aus. Der Grund liegt darin, dass bei dieser Simulation die „Siebintensität“ [1] wohl doch zu stark ist, da die Siebwirkung des jeweils größeren von zwei Komplementärteilern nicht ausgeschaltet wird. Wir wandeln die Simulation deshalb im Folgenden ab.

1.2 Rekursive Näherung für die Primzahldichte

Wir können die Primzahleigenschaft auch *rekursiv* definieren:

Eine beliebige natürliche Zahl x (≥ 2) ist Primzahl genau dann, wenn sie durch keine kleinere Primzahl t teilbar ist. Dabei genügt es, die Teilbarkeit nur durch solche Primzahlen t zu überprüfen, die höchstens gleich der Quadratwurzel aus x sind, da es zu größeren Teilern jeweils kleinere Komplementärteiler gibt. Dies versuchen wir nun zu simulieren.

Da jede t-te natürliche Zahl durch t teilbar ist, darf man annehmen, dass eine *beliebige* natürliche Zahl x mit der Wahrscheinlichkeit $1/t$ durch t teilbar ist. Betrachtet man nämlich die endliche Menge $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dann sind $[n/t]$ Elemente dieser Menge durch t teilbar. (Die eckige Klammer steht für "Größte-Ganze-Funktion", also für die Gauß-Klammer.) Die Laplace-Wahrscheinlichkeit p_n, dass ein Element dieser Menge durch t teilbar ist, beträgt somit $p_n = \frac{[\frac{n}{t}]}{n}$. Wegen $[\frac{n}{t}] \leq \frac{n}{t} < [\frac{n}{t}] + 1$ folgt weiter $\frac{1}{t} - \frac{1}{n} < p_n \leq \frac{1}{t}$ und deshalb $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{t}$.

Eine beliebige natürliche Zahl x ist also mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 1/t)$ *nicht* durch t teilbar.

Nehmen wir nun weiter an, dass die Teilbarkeit der Zahl x durch verschiedene Primzahlen, die alle kleiner oder gleich der Quadratwurzel aus x sind, *unabhängige* Ereignisse darstellen, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass x Primzahl ist, durch folgenden Term gegeben:

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{7}\right) \cdot \;\ldots\; \cdot \left(1 - \frac{1}{\langle\sqrt{x}\rangle}\right)$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{0}{4}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{\langle\sqrt{x}\rangle}\right)$$

Dabei soll die spitze Klammer um die Wurzel im Nenner des letzten Faktors in Anlehnung an die Gauß-Klammer die größte *Primzahl* kleiner oder gleich der Wurzel aus x symbolisieren.

Dieser Term ist jedoch insofern unbefriedigend, als er die konkrete Kenntnis aller Primzahlen bis zur Wurzel aus x zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $w(x)$ dafür, dass x Primzahl ist, erfordert.

Für unser Simulationsmodell ersetzen wir deshalb die Nullen ("ist nicht Primzahl") und Einsen ("ist Primzahl") in den Zählern der Brüche durch unsere *Wahrscheinlichkeiten* dafür, dass die jeweiligen Nenner bereits (Zufalls-) Primzahlen sind, und erhalten endlich die mit Formel 1.1-2 vergleichbare Rekursionsformel:

$$w(x) = \left(1-\frac{w(2)}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{w(3)}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{w(4)}{4}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{w\left(\left[\sqrt{x}\right]\right)}{\left[\sqrt{x}\right]}\right)$$

oder kürzer unter Verwendung des Produktzeichens:

$$1.2\text{-}1 \qquad w(x) = \prod_{t=2}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right) \qquad (x \in \mathbf{N_2})$$

Die eckige Klammer steht wieder für die Gauß-Klammer. $\mathbf{N_2} = \{2, 3, 4, ...\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen ≥ 2. Für $x = 2$ oder $x = 3$ ergibt sich das leere Produkt, welchem wir wie üblich den Wert 1 zuweisen.

Der entsprechende Simulationsalgorithmus lautet nun:

1. *Setze p = 2.*
2. *Streiche jede Zahl ab p^2 mit der Wahrscheinlichkeit 1/p .*
3. *Setze p = der ersten nicht gestrichenen Zahl hinter p und gehe nach 2.*

[Bei einer Realisation dieses Simulationsalgorithmus' muss man sich auf endlich viele natürliche Zahlen $p \leq k$ (mit einer oberen Schranke k) beschränken.]

Die Funktion $w(x)$ lässt sich sehr leicht rekursiv programmieren (etwa in der Programmiersprache PASCAL) und auch für große x schnell berechnen, da sich wegen des Wurzelausdrucks nur geringe Rekursionstiefen ergeben:

```
Function w(x:Integer):Real;
  Var produkt:Real; t:Integer;
  Begin
    produkt:=1;
    For t:=2 to trunc(sqrt(x)) do
      produkt:=produkt*(1-w(t)/t);
    w:=produkt
  end;
```

Die ersten Werte der Funktion w sind:

$w(2) = w(3) = 1$;

$w(4) = w(5) = ... = w(8) \quad = 1/2 \quad = 0{,}5$;

$w(9) = w(10) = ... = w(15) \quad = 1/3 \quad = 0{,}333...$;

$w(16) = w(17) = ... = w(24) \quad = 7/24 \quad = 0{,}291666...$.

Man erkennt sofort bzw. überlegt sich leicht, dass w (schwach-) monoton fallend über $\mathbf{N_2}$ ist, dass stets $0 < w(x) \leq 1$ gilt und dass die Funktionswerte jeweils bis zur nächsten Quadratzahl für x konstant bleiben.

Diese Wahrscheinlichkeitsfunktion w gibt erstaunlich genau die Primzahldichte an. Überprüfen lässt sich dies, indem man durch Aufsummieren dieser Wahrscheinlichkeiten (wie in 1.1-3) den Erwartungswert

$$1.2\text{-}2 \qquad W(z) := \sum_{x=2}^{z} w(x) \qquad (z \text{ aus } \mathbf{N_2}),$$

für die Anzahl aller Zufallsprimzahlen in unserem Simulationsmodell bis zu einer natürlichen Zahl z bildet und mit der tatsächlichen Anzahl $P(z)$ der Primzahlen, die kleiner oder gleich z sind, vergleicht (Tabelle 1):

z	P(z)	W(z)	W(z) / P(z)
10	4	5,17	1,2917
100	25	26,41	1,0566
1 000	168	166,53	0,9913
10 000	1 229	1 217,85	0,9909
100 000	9 592	9 632,99	1,0043

Tabelle 1

[*Anmerkung:* Sämtliche Tabellenwerte in diesem Aufsatz wurden mit Hilfe von selbst entwickelten einfachen PASCAL-Routinen berechnet, die durchweg aus nur wenigen Zeilen bestehen und leicht reproduzierbar sind. Auf literarische Fundstellen kann deshalb nicht verwiesen werden.]

1.3 Analytische Näherungsfunktion für die Primzahldichte - Primzahlsatz

Eine geschlossene nicht-rekursive Darstellung für die Funktion w wäre sicher wünschenswert, dürfte bei der recht eigenartigen Struktur aber kaum exakt realisierbar sein. Wir suchen deshalb nach einer analytischen Näherungsfunktion für w .

Nach 1.2-1 erhalten wir für $x \in \mathbf{N_2}$:

$$\frac{w((x+1)^2)}{w(x^2)} = \frac{\prod_{t=2}^{x+1}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right)}{\prod_{t=2}^{x}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right)} = \left(1-\frac{w(x+1)}{x+1}\right)$$

und damit die Beziehung

1.3-1 $$w((x+1)^2) = w(x^2)\cdot\left(1-\frac{w(x+1)}{x+1}\right) .$$

Zur Lösung dieser Gleichung versuchen wir den Ansatz mit einer Funktion $y(x)$, durch die die unangenehmen quadratischen Terme eliminiert werden, die also etwa der Beziehung

$$y(x^2) = a \cdot y(x)$$

genügt (mit einer noch unbekannten Konstanten a). Wir gehen damit in die vorige Gleichung ein und fordern, dass zumindest näherungsweise gilt

$$a \cdot y(x+1) \approx a \cdot y(x)\cdot\left(1-\frac{y(x+1)}{x+1}\right)$$

und nach Umrechnung, wobei sich a heraushebt:

$$y(x+1) - y(x) \approx -\frac{y(x)\cdot y(x+1)}{x+1} .$$

Wegen der Monotonie und Beschränktheit der Funktion w ändert sich diese für große x nur langsam, so dass wir dies auch für y fordern müssen. Wir können dann die Differenz auf der linken Seite der letzten Gleichung als Differenzenquotienten mit dem Nenner 1 ansehen und durch den Differentialquotienten y' (etwa an der Stelle x+1) annähern. Auf der rechten Seite ersetzen wir noch $y(x)$ durch $y(x+1)$, so dass wir schließlich die Differentialgleichung erhalten:

$$y'(x+1) = -\frac{y(x+1)\cdot y(x+1)}{x+1} ,$$

oder - nach Rückkehr zu x -:

$$y'(x) = -\frac{(y(x))^2}{x} \quad \text{oder einfach :}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{y^2}{x}$$

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x} .$$

Nach Integration folgt:

$$\frac{1}{y} = \ln x + c \quad \text{mit der Integrationskonstanten } c,$$

$$\text{oder :} \qquad y(x) = \frac{1}{\ln x + c}$$

Die Lösung ist nur brauchbar, wenn sie auch die Vorgabe $y(x^2) = a\cdot y(x)$ erfüllt, d.h.:

$$\frac{1}{\ln(x^2)+c} = \frac{1}{2\ln x + c} = \frac{\frac{1}{2}}{\ln x + \frac{c}{2}} \overset{!}{=} \frac{a}{\ln x + c}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt für alle x aus $\mathbf{N_2}$ offenbar genau dann, wenn a = 1/2 und c = 0 ist, so dass wir erhalten:

$$\boxed{\text{1.3-2} \quad w(x) \approx y(x) = \frac{1}{\ln x} \qquad (x \geq 2)}$$

Das ist die bekannte Näherungsfunktion für die Primzahldichte, aus welcher sich der Primzahlsatz in folgender Form ergibt:

1.3-3 $$P(z) \approx \int_2^z \frac{1}{\ln x}\,dx$$

Natürlich interessiert uns auch, wie gut w von y angenähert wird (s. Tabelle 2).

x	**w(x)**	**y(x)**	**y(x)/w(x)**
2	1,00000	1,44270	1,44270
3	1,00000	0,91024	0,91024
10	0,33333	0,43429	1,30288
100	0,19499	0,21715	1,11363
1 000	0,13986	0,14476	1,03505
10 000	0,10767	0,10857	1,00844
100 000	0,08756	0,08686	0,99194

Tabelle 2

1.4 Divergenz der Summe aller Primzahlinversen

Bekanntlich divergiert die "harmonische Reihe" $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}$. Dies folgt sofort mit 1.4-1:

$$\sum_{t=1}^{z}\frac{1}{t} \geq \int_1^z \frac{1}{t}\,dt = \ln z \qquad (z \in \mathbf{N}).$$

Aber auch die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen divergiert, wie schon Euler nachgewiesen hat. Wir können dies folgendermaßen plausibilisieren:

$$\sum_{\substack{p=2 \\ p\ \text{Primzahl}}}^{z} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0}{6}+\frac{1}{7}+\frac{0}{8}+\ldots+\frac{1}{\langle z\rangle}$$

Wir ersetzen wieder wie in 1.1 die Nullen ("ist nicht Primzahl") und Einsen ("ist Primzahl") in den

Zählern der Brüche durch die *Wahrscheinlichkeiten* dafür, dass die jeweiligen Nenner bei der Simulation Zufallsprimzahlen werden, und erhalten für die Summe der Kehrwerte der Zufallsprimzahlen bis zur Schranke z mit 1.3-2 und 1.5-2 den Erwartungswert:

$$\sum_{t=2}^{z} \frac{w(t)}{t} \approx \sum_{t=2}^{z} \frac{1}{t \cdot \ln t} \approx \int_{2}^{z} \frac{1}{t \cdot \ln t} \mathrm{d}t = \ln(\ln t)\Big|_{2}^{z} \approx \ln \ln z$$

Da dieser - wenngleich äußerst langsam - divergiert, ist dies auch für die Summe der Primzahlkehrwerte plausibel:

1.4-1 $$\sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ Primzahl}}}^{z} \frac{1}{p} \approx \sum_{t=2}^{z} \frac{w(t)}{t} \approx \ln \ln z$$

1.5 Anhang

Man macht sich leicht an Hand eines Graphen klar, dass für positivwertige und monoton fallende Funktionen f gilt:

1.5-1 $$\sum_{x=a+1}^{b} f(x) \le \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{x=a}^{b-1} f(x) \le \sum_{x=a}^{b} f(x)$$

1.5-2 $$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a}^{b+1} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{x=a}^{b} f(x) \le \int_{a-1}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

(a, b ganz, $a \le b$)

Wir werden deshalb oft Integrale durch Summen oder Summen durch Integrale annähern, wobei die Fehler gut abgeschätzt werden können. Ersetzt man etwa das Integral $\int_{a}^{b} f(x)dx$ durch eine der Summen $\sum_{x=a}^{b-1} f(x)$ oder $\sum_{x=a+1}^{b} f(x)$, so ist der Fehler höchstens gleich $f(a) - f(b)$.

Wir werden solche Fehlerbetrachtungen jedoch meist unterdrücken.

Aufgabe:

Wie viele Primzahlen liegen schätzungsweise zwischen 10^{1000} und $10^{1000} + 10\,000$ oder allgemein zwischen 10^n und $10^n + 10n$ (für $n \ge 1$)?

Lösung: Für die gesuchte Anzahl A gilt nach 1.3-3:

$$A = P(10^n + 10n) - P(10^n) \approx \int_{10^n}^{10^n+10n} \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x$$

und deshalb nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\frac{10n}{\ln(10^n + 10n)} \le A \le \frac{10n}{\ln(10^n)} = \frac{10}{\ln 10} \approx 4{,}34 .$$

Bereits für $n = 1$ ist der linke Term größer als 3, so dass stets mit etwa 4 Primzahlen in den betrachteten Intervallen zu rechnen ist.

Aufgabe:

Ein Zahlenstrahl (Einheit = 1 cm) beginne im Mittelpunkt der Sonne und laufe durch die Mitte der Erde. Die Entfernung des Erdmittelpunktes von demjenigen der Sonne beträgt etwa 150 Mio. km.

a) Für alle zwischen Sonnen- und Erdmittelpunkt auf dem Zahlenstrahl aufgereihten natürlichen Zahlen ist die ungefähre Summe S ihrer Kehrwerte anzugeben.

b) Für alle zwischen Sonnen- und Erdmittelpunkt auf dem Zahlenstrahl aufgereihten Primzahlen ist die ungefähre Summe T ihrer Kehrwerte anzugeben.

c) Löse a und b für einen entsprechenden Zahlenstrahl, der das gesamte Universum (Durchmesser ca. 20 Mrd. Lichtjahre) durchläuft.

Lösung:

a) $S \approx \ln (150 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 10^5 \cdot 1/\text{km})$
$= \ln (1{,}5 \cdot 10^{13}) \approx 30{,}3$

b) $T \approx \ln S \approx 3{,}4$

c) $S \approx \ln (20 \cdot 10^9 \text{ Lj} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km/Lj} \cdot 10^5 \text{ 1/km})$
$= \ln (1{,}892 \cdot 10^{28}) \approx 65{,}1$

$T \approx \ln S \approx 4{,}2$

2 Primzahlzwillinge

2.1 Dichte von Primzahlzwillingen

Wir stellen uns zunächst die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_B die Zahl x (≥ 2) (Zufalls)-Primzahl ist, wenn schon $x+2$ eine Primzahl ist (*"bedingte Wahrscheinlichkeit"*).

x ist sicher nicht durch 2 teilbar.

Die Wahrscheinlichkeit, dass x durch 3 teilbar ist, beträgt nun 1/2 und nicht 1/3, da ja x+2 nicht durch 3 teilbar ist und deshalb eine der Zahlen x+1 oder x durch 3 teilbar sein muss. Entsprechendes gilt für größere Teiler. Damit modifiziert sich der Ansatz in 1.1 zu

2.1-1 $$w_B(x) = \prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]} \left(1 - \frac{w(t)}{t-1}\right) \qquad (x \in \mathbf{N_2})$$

Die Wahrscheinlichkeit $w_2(x)$, dass das Zahlenpaar $(x \mid x+2)$ Primzahlzwilling ist, folgt damit zu:

2.1-2 $$w_2(x) = w(x+2) \cdot w_B(x) \qquad (x \in \mathbf{N_2}) .$$

[*Anmerkung:* Der in 1.2 beschriebene Simulationsalgorithmus reicht zur Darstellung entsprechender Zufalls-Primzahlzwillinge nicht aus. Eine mit Gleichung 2.1-1 kompatible Ergänzung überlassen wir dem Leser.]

2.2 Analytische Näherung für die Dichte von Primzahlzwillingen

Wir betrachten zunächst den Quotienten

2.2-1 $$C(x) := \frac{w_B(x)}{w(x)} = \frac{\prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t-1}\right)}{\prod_{t=2}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right)},$$

der sich für $x \geq 4$ umformen lässt zu

$$C(x) = 2\frac{\prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t-1}\right)}{\prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right)} = 2\prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\frac{\left(1-\frac{w(t)}{t-1}\right)}{\left(1-\frac{w(t)}{t}\right)} .$$

Man erkennt, dass die Funktion $C(x)$ (ab $x = 4$) schwachmonoton fällt, da die auf der rechten Seite gegebenenfalls als zusätzliche Faktoren hinzutretenden Quotienten stets kleiner als 1 sind.

Andererseits lässt sich $w_B(x)$ durch $w(x)$ nach unten abschätzen:

$$w_B(x) = \prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t-1}\right) \geq \prod_{t=3}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t-1)}{t-1}\right)$$
$$= \prod_{t=2}^{[\sqrt{x}]-1}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right) \geq \prod_{t=2}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{w(t)}{t}\right) = w(x)$$

Die erste Abschätzung gilt wegen der Monotonie von w und die zweite, weil nach rechts hin ein weiterer Klammerfaktor (≤ 1) hinzukommt.

Also ist 1 eine untere Schranke von C und zusammen mit der Monotonie folgt, dass $C(x)$ für x gegen unendlich einen Grenzwert c_1 hat mit $1 \leq c_1 < 2$. Tabelle 3 legt den Grenzwert $c_1 \approx 1{,}285$ nahe.

x	**C(x)**
10	1,50000
1 000	1,29394
100 000	1,28565
10 000 000	1,28511
1 000 000 000	1,28506

Tabelle 3

Mit der Näherung $w(x) \approx y(x) = 1/\ln(x)$ nach 1.3-2 folgt also:

2.2-2 $$w_B(x) = C(x) \cdot w(x) \approx \frac{c_1}{\ln x}$$

und mit 2.1-2:

2.2-3 $$w_2(x) \approx \frac{1}{\ln(x+2)} \cdot \frac{c_1}{\ln x} \approx \frac{c_1}{(\ln x)^2}$$

Um die Güte der (gemäß 2.1-2, 2.1-1 und 1.2-1 rekursiv zu berechnenden) Wahrscheinlichkeitsfunktion w_2 im Vergleich zur tatsächlichen Primzahlzwillingsdichte zu testen, definieren wir die aufsummierte Wahrscheinlichkeit als Erwartungswert für die Anzahl der Primzahlzwillinge bis zu einer Stelle z:

2.2-5 $$W_2(z) := \sum_{x=2}^{z} w_2(x)$$

und deren Näherung

2.2-5 $$L_2(z) := \sum_{x=2}^{z} \frac{c_1}{(\ln x)^2} \qquad (\text{ mit } c_1 = 1{,}285)$$

und vergleichen beide mit der tatsächlichen Anzahl $P_2(z)$ von Primzahlzwillingen bis zur Stelle z (s. Tabelle 4).

z	**P_2**	**W_2**	**W_2/P_2**	**L_2**	**L_2/P_2**
10	2	3,5	1,750	6,4	3,225
100	8	10,5	1,309	14,8	1,853
1 000	35	39,1	1,117	46,2	1,320
10 000	205	198,1	0,966	210,1	1,025
100 000	1224	1212,8	0,991	1216,9	0,994

Tabelle 4

Anmerkung:
Modifiziert man die Funktion $C(x)$ zu einer Funktion $\hat{C}(x)$, bei der das Produkt nur über Primzahlen p läuft und für diese $w(p)$ durch 1 ersetzt wird, so erhält man (für $x \geq 4$):

$$\hat{C}(x) = 2\prod_{p>2}^{[\sqrt{x}]} \frac{\left(1-\frac{1}{p-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 2\prod_{p>2}^{[\sqrt{x}]}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Der Grenzwert c_2 dieser Funktion $\hat{C}(x)$ (oder auch seine Hälfte) heißt *Primzahlzwillingskonstante* und beträgt 1,32032... bzw. 0,66016... .

2.3 Plausibilität unendlich vieler Primzahlzwillinge

Nun gilt weiter mit 2.2-4, 2.2-3 und 1.5-1:

$$W_2(z) = \sum_{x=2}^{z} w_2(x) \approx \sum_{x=2}^{z}\frac{c_1}{(\ln x)^2} \approx \int_{x=2}^{z}\frac{c_1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$$

Da das letzte Integral für z gegen unendlich ebenfalls gegen unendlich strebt (s.u. 2.5-6), gilt dies auch für $W_2(z)$. Es gibt demnach sehr wahrscheinlich unendlich viele Primzahlzwillinge!

2.4 Konvergenz der Summe aller Zwillingsinversen

Wir überprüfen noch die Summe $S_2(z)$ der Kehrwerte der jeweils ersten Zahlen eines Primzahlzwillings wie in 1.4 und erhalten mit 2.2-3 und 1.4-2:

$$S_2(z) = \sum_{\substack{p=2 \\ p,\,p+2 \text{ Primzahlen}}}^{z} \frac{1}{p} \approx \sum_{x=2}^{z}\frac{w_2(x)}{x}$$

$$\approx \sum_{x=2}^{z}\frac{c_1}{x\cdot(\ln x)^2} \approx \int_2^z \frac{c_1}{t\cdot(\ln t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{c_1}{\ln t}\right]_2^z$$

$$= \frac{c_1}{\ln 2} - \frac{2}{\ln z} < \frac{2}{\ln 2} < 3$$

Für z gegen unendlich konvergiert also diese Summe im Gegensatz zur Summe *aller* Primzahlinversen. (vgl. 1.3)

Der Wert dieser unendlichen Summe lässt sich genauer bestimmen, wenn man sie etwa bis zu einer Stelle z mit Hilfe eines Computers genau berechnet und nur den Rest abschätzt. Es ergibt sich dann ein Grenzwert von $\approx 1{,}06$.

2.5 Anhang

Nach der Regel von l'Hospital gilt für ableitbare reelle Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die für x gegen unendlich beide gegen unendlich streben, die Beziehung:

2.5-1 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Damit ergibt sich für natürliche n die Rekursionsformel:

2.5-2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left((\ln x)^n\right)'}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^{n-1}}$$

und daraus:

2.5-3 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{x}{1} = \infty$$

(für ganze $n \geq 0$ und reelle $x > 1$)

Überdies erhalten wir durch Ableiten

2.5-4 $$\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right)' = \frac{1\cdot(\ln x)^n - x\cdot n\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{2n}}$$
$$= \frac{1}{(\ln x)^n} - \frac{n}{(\ln x)^{n+1}}$$

und anschließende Integration die Darstellung:

2.5-5 $$\int_a^b \frac{1}{(\ln x)^n}\mathrm{d}x$$
$$= \left.\frac{x}{(\ln x)^n}\right|_a^b + n\int_a^b\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$(1 < a \leq b,\ \ n \geq 0)$

Da der erste Summand auf der rechten Seite gemäß 2.5-3 für b gegen unendlich ebenfalls gegen unendlich strebt und der zweite Summand nicht negativ wird, folgt:

2.5-6 $$\lim_{z\to\infty}\int_a^z\frac{1}{(\ln x)^n}\mathrm{d}x = \infty \qquad (a > 1,\ \ n \geq 0)$$

3 Primzahlen in Zahlenfolgen

Bereits 1785 stellte A.M. Legendre die Behauptung auf, dass jede arithmetische Folge $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots$, in der a und b teilerfremde natürliche Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Lückenlos bewiesen wurde diese Behauptung von J.P.G. Dirichlet im Jahre 1837.

Entsprechende Plausibilitätsüberlegungen, die diese Aussage sogar näher quantifizieren, müssen wir aus Platzgründen dem Leser überlassen. Als Anregung teilen wir nur mit, dass Folgen der Gestalt

$$x_k = a + bk \qquad (k \in \mathbf{N_0})$$

bis zu einer Schranke z (d.h. $x_k \le z$) für $a = 2$ und $b = 3$ sowie $a = 5$ und $b = 6$ etwa gleich viele Primzahlen enthalten, aber doppelt so viele wie für $a = 2$ und $b = 5$ oder $a = 3$ und $b = 8$.

3.1 Plausibilität unendlich vieler Mersenne-Primzahlen

Mersenne'sche Zahlen haben die Gestalt

3.1-1 $\quad x_k = 2^k - 1 \qquad (k \in \mathbf{N_2})$.

Unter den ersten 7 Gliedern dieser Folge (3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, ...) gibt es 4 Primzahlen. Leibniz glaubte noch, dass für jede *Prim*zahl k auch x_k eine Primzahl sei, doch bereits $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ ist keine Primzahl [2].

Da die Mersenne-Zahlen alle ungerade sind, verdoppelt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Mersenne-Zahl Primzahl ist, gegenüber der „Grundwahrscheinlichkeit" $w(x_k)$ auf $2w(x_k)$. Denn diese Zusatzinformation oder „Bedingung" führt formal (mit U für das Ereignis *Ungerade* und Z für das Ereignis *Primzahl*) zu der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$p_U(Z) = \frac{p(U \cap Z)}{p(U)} = \frac{p(Z)}{p(U)} = \frac{p(Z)}{\frac{1}{2}} = 2p(Z) .$$

Für $x_2 = 3$ ist ein Verdoppeln der Wahrscheinlichkeit $w(3) = 1$ jedoch unsinnig, so dass wir schließlich als Wahrscheinlichkeit dafür, dass für ein zufällig ausgewähltes k das Folgenglied x_k eine Primzahl ist, erhalten:

3.1-2 $$w_M(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 2 \\ 2 \cdot w(x_k), & \text{falls } k > 2 \end{cases}$$

Der Erwartungswert $W_M(k_0)$ für die Anzahl der Primzahlen in der Zahlenfolge bis zum Folgenglied x_{k_0} $(k_0 \in \mathbf{N_2})$ ergibt sich dann zu:

3.1-3 $$\begin{aligned} W_M(k_0) &= \sum_{k=2}^{k_0} w_M(x_k) = 1 + \sum_{k=3}^{k_0} 2 \cdot w(x_k) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=3}^{k_0} w(2^k - 1) \end{aligned}$$

Durch das rasche Anwachsen der Folgenglieder ist eine signifikante Bestätigung dieser Beziehung kaum möglich. Doch immerhin gilt bis $k_0 = 30$ Tabelle 5.

k_0	x_{k0}	$P_M(k_0)$	$W_M(k_0)$	$L_M(k_0)$
10	1 023	4	4,94	5,64
20	1 048 575	7	6,87	7,64
30	1 073 741 823	7	8,04	8,81

Tabelle 5

Dabei ist $P_M(k_0)$ die tatsächliche Anzahl der Mersenne'schen Primzahlen bis zur Schranke x_{k_0} und $L_M(k_0)$ eine einfache Näherung für $W_M(k_0)$. Mit 1.3-2 und 1.5-1 folgt nämlich aus 3.1-3:

3.1-4 $$\begin{aligned} W_M(k_0) &\approx 1 + 2 \sum_{k=3}^{k_0} \frac{1}{\ln(2^k - 1)} \approx 1 + 2 \sum_{k=3}^{k_0} \frac{1}{k \cdot \ln 2} \\ &= 1 + \frac{2}{\ln 2} \sum_{k=3}^{k_0} \frac{1}{k} \approx 1 + \frac{2}{\ln 2} \int_2^{k_0} \frac{1}{x} dx \\ &= 1 + \frac{2}{\ln 2} \cdot \ln \frac{k_0}{2} \quad =: L_M(k_0) \end{aligned}$$

Bekannt ist, dass die Indizes $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$ die einzigen 12 Primzahlen x_k für $k \le k_0 = 130$ liefern [2]. $L_M(130) = 13{,}04$ wird somit bis zu dieser Grenze als Näherung gut bestätigt.

Da die Funktion $L_M(k)$ für k gegen unendlich ebenfalls (wenn auch nur langsam) gegen unendlich strebt, ist die Existenz unendlich vieler Mersenne'scher Primzahlen plausibel.

3.2 Plausibilität nur endlich vieler Fermat-Primzahlen

Fermat'sche Zahlen haben die Gestalt

$$x_k = 2^{2^k} + 1 \quad (k \in \mathbf{N_0}) .$$

Für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ erhält man die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537. Weitere Fermat'sche Primzahlen sind nicht bekannt. Man weiß bis heute nicht, ob es weitere oder gar unendlich viele Primzahlen in dieser Zahlenfolge gibt.

Wie oben in 3.1 bilden wir die aufsummierte Wahrscheinlichkeit und damit den Erwartungswert für die Anzahl der Fermat'schen Primzahlen in der Zahlenfolge (x_k) bis zum Index k_0 und nähern diesen durch einen Ausdruck $L_F(k_0)$ an (s. Tabelle 6):

$$W_F(k_0) = \sum_{k=0}^{k_0} w_F(x_k) = 1 + 2\sum_{k=1}^{k_0} w(2^{2^k} + 1)$$

$$\approx 1 + 2\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\ln(2^{2^k})} = 1 + 2\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k \ln 2}$$

$$= 1 + \frac{2}{\ln 2}\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{2}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{2^{k_0}}\right) =: L_F(k_0)$$

k_0	x_{k_0}	$P_F(k_0)$	$W_F(k_0)$	$L_F(k_0)$
0	3	1	1,00	1,00
1	5	2	2,00	2,44
2	17	3	2,58	3,16
3	257	4	2,92	3,52
4	65 537	5	3,10	3,71
5	4 294 967 297	5	?,??	3,80

Tabelle 6

Nun ist der Grenzwert von $L_F(k_0)$ für k_0 gegen unendlich gleich $1+2/\ln 2 \approx 4$.

Mit 5 Fermat'schen Primzahlen ist demnach das "Soll" schon mehr als erfüllt, so dass mit weiteren Fermat'schen Primzahlen nicht zu rechnen ist!

Aufgabe:

Wie viele Mersenne'sche Primzahlen sind bis zur Schranke 10^{1000} etwa zu erwarten?

Lösung:

$10^{1000} \approx (10^3)^{333} \approx (2^{10})^{333} \approx 2^{3330}$.

$P_M(3330) \approx L_M(3330) = 1+2/\ln 2 \cdot \ln(3330/2) \approx 22{,}4$.

Demnach sind rund 22 Mersenne'sche Primzahlen bis zur Schranke 10^{1000} zu erwarten.

Aufgabe: Gegeben sei die Zahlenfolge

$$x_k = \left\lfloor 1001^{1{,}001^k} \right\rfloor \quad (k \in \mathbf{N_0})$$

wobei die eckige Klammer die Gauß'sche Größte-Ganze-Funktion darstelle.

a) Berechne die ersten 8 Glieder der Folge und markiere die Primzahlen!

b) Wie viele Primzahlen sind bis x_{100} bzw. bis x_{1000} zu erwarten? Vergleiche mit deren tatsächlicher Anzahl!

c) Wie viele Primzahlen sind in der gesamten Folge zu erwarten?

Lösung:

a) 1001, 1007, 1014, <u>1021</u>, 1029, 1036, 1043, 1050, ...

b) Wir lösen die Aufgabe zunächst allgemein für

$$x_k = \left\lfloor a^{b^k} \right\rfloor \qquad (k \in \mathbf{N_0} ,\ a, b > 1)$$

Für die Anzahl $W_{\text{Folge}}(n)$ der bis zum n-ten Folgenglied zu erwartenden Primzahlen ergibt sich dann:

$$W_{\text{Folge}}(n) = \sum_{k=0}^{n} w(x_k) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\ln(a^{b^k})}$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b^k} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{b\cdot(1-b^{-n-1})}{(b-1)\cdot \ln a}$$

In unserem Beispiel sind daher bis x_{100} rund 14 Primzahlen zu erwarten; tatsächlich sind es 16. Bis x_{1000} sind rund 92 Primzahlen zu erwarten; tatsächlich sind es 84.

c) Für n gegen unendlich geht die insgesamt zu erwartende Anzahl der Primzahlen etwa gegen $1001/\ln 1001 \approx 145$.

4 Große Fermat'sche Vermutung

Die große Fermat'sche Vermutung ("Fermats Letzter Satz"), die erst 1995 vollständig bewiesen wurde, besagt bekanntlich, dass die Gleichung

$a^n + b^n = c^n$ mit natürlichen a, b, c, n

für $n > 2$ keine Lösung besitzt. Zur Plausibilisierung dieser Aussage stellen wir uns die Frage, wie "wahrscheinlich" es ist, dass die n-te Potenz einer natürlichen Zahl (kurz: n-Potenzzahl) mit der Summe zweier anderer n-Potenzzahlen übereinstimmt.

Wir werden feststellen, dass die Dichte der n-Potenzzahlen in der Gegend von x proportional zu $x^{1/n-1}$ ist und die Dichte der Summen aus zwei n-Potenzzahlen proportional zu $x^{2/n-1}$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine natürliche Zahl x sowohl eine n-Potenzzahl wie auch die Summe zweier n-Potenzzahlen darstellt, ist unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit dieser Ereignisse dann zu $x^{3/n-2}$ proportional.

Die Summe oder auch das Integral über diese Wahrscheinlichkeiten bis zu einer Stelle z sollte ein Maß für die ungefähre Anzahl dieser Koinzidenzen bis zu dieser Stelle darstellen. Da das Integral bei $n > 3$ endlich bleibt, auch wenn z über alle Grenzen wächst, ist in diesem Falle also mit höchstens endlich vielen Lösungen der Fermat'schen Gleichung zu rechnen.

Wir werden im Folgenden diese Aussagen näher quantifizieren.

4.1 Dichte der *n*-Potenzzahlen

Mit $z = a^n$ $(a, n \in \mathbf{N})$ ist a die Anzahl der n-ten Potenzen natürlicher Zahlen (kurz: n-Potenzzahlen), die kleiner oder gleich z sind:

$$\left|\left\{1^n, 2^n, 3^n, ..., a^n\right\}\right| = a = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} \quad .$$

Damit ist die Anzahl der n-Potenzzahlen, die kleiner oder gleich t sind ($t \in \mathbf{R}^+$), exakt durch $[\sqrt[n]{t}]$ gegeben (mit der eckigen Klammer als Gauß'sche Größte-Ganze-Funktion) und näherungsweise (bzw. nach oben abgeschätzt) durch $\sqrt[n]{t}$:

$$\left|\left\{1^n, 2^n, 3^n, ..., a^n\right\}\right| = [\sqrt[n]{t}] \approx \sqrt[n]{t} \quad .$$

Die Dichte der n-Potenzzahlen in der Gegend von t beträgt dann ungefähr

4.1-1 $$\rho_n(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt[n]{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1} \quad .$$

Ein Algorithmus zur Erzeugung einer (anfänglich leeren) Menge M_n von „Zufalls-n-Potenzzahlen" könnte etwa folgendermaßen aussehen:

1. *Setze $t = 1$.*
2. *Füge t mit der Wahrscheinlichkeit $\rho_n(t) = \frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}$ der Menge M_n als Element hinzu.*
3. *Nimm für t die nächste natürliche Zahl und gehe nach 2.*

Dann gibt $\rho_n(t)$ offenbar die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die beliebig herausgegriffene natürliche Zahl t eine (Zufalls-)n-Potenzzahl ist. Dies Simulationsmodell reicht für die folgenden Überlegungen aus.

4.2 Dichte der Summen aus zwei *n*-Potenzzahlen

Seien nun t und x zwei beliebige natürliche Zahlen mit $0 < t < x$. Dann sind t bzw. $x - t$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\rho_n(t)$ bzw. $\rho_n(x - t)$ n-Potenzzahlen, und beide Ereignisse, die wir gemäß unserem Modell als unabhängig ansehen dürfen, treffen zugleich ein mit der Wahrscheinlichkeit $\rho_n(t)\cdot\rho_n(x - t)$.

Dies ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die natürliche Zahl x durch die natürliche Zahl t in die Summe zweier n-Potenzzahlen zerlegt wird.

Der Erwartungswert für die Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten der Zahl x in die Summe zweier (Zufalls-)n-Potenzzahlen, ergibt sich durch Summation oder Integration nach t, wobei t aus Symmetriegründen nur bis $[x/2]$ zu laufen braucht:

4.2-1 $$\sum_{t=1}^{[x/2]}\rho_n(t)\cdot\rho_n(x-t) \approx \int_0^{x/2}\rho_n(t)\cdot\rho_n(x-t)\mathrm{d}t =: \varphi_n(x)$$

Trotz dieser Einschränkung $t \le x/2$ kann es sein, dass x auf mehr als eine Art in die Summe aus zwei n-Potenzzahlen zerlegt wird, wie das Beispiel $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ zeigt. Diese eventuelle Mehrfachheit der Zerlegung von x wird im Erwartungswert $\varphi_n(x)$ mitgezählt.

Wir versuchen nun, die Funktion $\varphi_n(x)$ näher zu berechnen.

$$\varphi_n(x) = \int_0^{x/2} \rho_n(t) \cdot \rho_n(x-t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_0^{x/2} t^{\frac{1}{n}-1} (x-t)^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}t$$

Das auf den ersten Blick recht hässliche Integral lässt sich glücklicherweise mit der Substitution $t = x \cdot v$, $\mathrm{d}t = x \cdot \mathrm{d}v$ so umformen, dass die Abhängigkeit von x vor das Integral gezogen werden kann:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n^2} \int_0^{1/2} (xv)^{\frac{1}{n}-1} (x-xv)^{\frac{1}{n}-1} x\mathrm{d}v$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{n}-1}}{n^2} \int_0^{1/2} v^{\frac{1}{n}-1} (1-v)^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}v$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{n}-1}}{n^2} \int_0^{1/2} (v \cdot (1-v))^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}v$$

Mit der Abkürzung

4.2-2 $$B_n := \frac{1}{n^2} \int_0^{1/2} (v \cdot (1-v))^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}v$$

erhalten wir eine einfache Formel für den Erwartungswert für die Anzahl der Zerlegungen der Zahl x in zwei (Zufalls-)n-Potenzzahlen:

4.2-3 $$\varphi_n(x) = B_n \cdot x^{\frac{2}{n}-1}$$

Wir integrieren diese Funktion und erhalten damit eine Näherung $\Phi_n(z)$ für den Erwartungswert für die Anzahl aller Zerlegungen aller natürlichen Zahlen bis z :

4.2-4 $$\boxed{\Phi_n(z) = \int_0^z B_n \cdot x^{\frac{2}{n}-1} \cdot \mathrm{d}x = \frac{n}{2} \cdot B_n \cdot z^{\frac{2}{n}}}$$

Die Konstanten B_n (n = 1, 2, 3, ...) lassen sich sowohl leicht abschätzen (s. Anhang 4.6.1) als auch beliebig genau berechnen (s. Anhang 4.6.2). Man erhält:

$B_1 = 0{,}5$; $B_2 = 0{,}3926990...$;

$B_3 = 0{,}2944397...$; $B_4 = 0{,}2317595...$;

$B_5 = 0{,}1900300...$; $B_6 = 0{,}1606351...$; ...

Mit $f_n(x)$ bezeichnen wir die tatsächliche Anzahl der verschiedenen Zerlegungen der Zahl x in die Summe zweier n-Potenzzahlen. Dann gilt z.B.: $f_2(4) = 0$, $f_2(5) = 1$ (wegen der Zerlegung 5 = 1+4) und $f_2(50) = 2$ (wegen 50 = 1+49 = 25+25). Schließlich sei $F_n(z)$ die Summe aller $f_n(x)$ für x von 1 bis z.

Tabelle 7 zeigt, wie gut $F_n(z)$ durch $\Phi_n(z)$ angenähert wird.

z	n	$F_n(z)$	$\Phi_n(z)$	Φ_n/F_n
10 000	1	25 000 000	25 000 000,0	1,000
10 000	2	3 912	3 927,0	1,004
10 000	3	204	205,0	1,005
10 000	4	43	46,4	1,078
10 000	5	19	18,9	0,995
10 000	6	10	10,4	1,038

Tabelle 7

4.3 Dichte der Summen aus zwei teilerfremden *n*-Potenzzahlen

Im Hinblick auf notwendige "Unabhängigkeitsforderungen" in Abschnitt 4.4 modifizieren wir die in 4.2 betrachtete Zerlegung einer Zahl in die Summe aus zwei n-Potenzzahlen dahingehend, dass wir nur Summen aus *teilerfremden* Summanden zulassen.

Bezeichne nun $f^*_n(x)$ die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen der Zahl x in die Summe zweier *teilerfremder* n-Potenzzahlen. Dann gilt nach wie vor $f^*_2(4) = 0$ und $f^*_2(5) = 1$, jedoch auch $f^*_2(50) = 1$, da nun die Zerlegung 50 = 25+25 entfällt. Entsprechend sei $F^*_n(z)$ die Summe aller $f^*_n(x)$ für x von 1 bis z.

Der *Erwartungswert* für die Anzahl der Zerlegungen der Zahl x in zwei *teilerfremde* (Zufalls-)n-Potenzzahlen ergibt sich zu

4.3-1 $$\varphi^*_n(x) = \eta \cdot \varphi_n(x) = \eta B_n x^{\frac{2}{n}-1}$$

mit $\eta \approx 0{,}6079$ (s. Anhang 4.6.3).

Sei weiter $\Phi^*_n(z)$ das Integral dieser Funktion $\varphi^*_n(x)$ für x von 0 bis z, so erhält man mit Tabelle 8 eine der Tabelle 7 entsprechende Übersicht.

(z stets = 10 000)

n	$F^*_n(z)$	$\Phi^*_n(z)$	$\Phi^*_n(z)/F^*_n(z)$
1	15 198 743	15 175 000,0	0,9984
2	2 386	2 383,7	0,9990
3	125	124,4	0,9955
4	27	28,1	1,0421
5	11	11,5	1,0437
6	6	6,3	1,0503

Tabelle 8

Im Hinblick auf eine spätere Überlegung sei noch Folgendes angemerkt:

Für die Zerlegung einer *ungeraden* Zahl in zwei teilerfremde n-Potenzzahlen gibt es potentiell zwei Arten: *gerade-ungerade* und *ungerade-gerade*, d.h., die kleinere n-Potenzzahl ist gerade und die größere ist ungerade oder aber genau umgekehrt. Eine *gerade* Zahl lässt sich aber teilerfremd höchstens als *ungerade-ungerade* zerlegen, da hier die Möglichkeit *gerade-gerade* entfällt. Somit gibt es im Mittel doppelt so viele Zerlegungen ungerader Zahlen wie Zerlegungen gerader Zahlen in teilerfremde n-Potenzzahlen.

4.4 Dichte der Fermat'schen Gleichungen mit teilerfremden Komponenten

Unter einer "in z verankerten Fermat'schen Gleichung n-ten Grades mit den Komponenten a, b und c" wollen wir eine Beziehung der Gestalt

$z = c^n = a^n + b^n$ (mit z, a, b, c, n aus **N**)

verstehen. Sei nun z eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist z nach 4.1 mit der Wahrscheinlichkeit $\rho_n(z)$ eine n-Potenzzahl ($z = c^n$) und nach 4.2 mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi_n(z)$ die Summe zweier n-Potenzzahlen ($z = a^n + b^n$), so dass das Produkt $\rho_n(z)\cdot\varphi_n(z)$ die Wahrscheinlichkeit (oder Dichte) für die Existenz einer Beziehung der Gestalt $c^n = z = a^n + b^n$ und damit für die Existenz einer in z verankerten Fermat'schen Gleichung angeben sollte, sofern gewisse "Unabhängigkeitsbedingungen" erfüllt sind.

Dies können wir aber nicht von vornherein annehmen, da die Existenz einer in z verankerten Fermat'schen Gleichung die Existenz einer in zt^n (t aus **N**) verankerten Fermat'schen Gleichung nach sich zieht: $zt^n = (ct)^n = (at)^n + (bt)^n$.

Deshalb beschränken wir uns im Folgenden auf die Betrachtung von Fermat'schen Gleichungen mit *teilerfremden* Komponenten a, b, c. Dabei sind, wie man leicht sieht, alle drei Komponenten schon dann paarweise teilerfremd, wenn nur zwei von ihnen teilerfremd sind.

Wir definieren nunmehr

4.4-1 $\quad \psi_n(z) := \rho_n(z)\cdot\varphi^*_n(z)$

und hoffen, damit einen Näherungsterm für die Dichte der in z verankerten Fermat'schen Gleichungen mit teilerfremden Komponenten erhalten zu haben.

Wir explizieren die rechte Seite und integrieren:

4.4-2

$$\psi_n(z) \;=\; \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \cdot \eta B_n z^{\frac{2}{n}-1} \;=\frac{\eta}{n} B_n z^{\frac{3}{n}-2}$$

$$\Psi_n(z) = \int_1^z \psi_n(x)dx = \frac{\eta}{3-n} B_n x^{\frac{3}{n}-1}\Big|_1^z$$

$$= \frac{\eta}{3-n} B_n (z^{\frac{3}{n}-1} - 1) \qquad \text{für} \quad n \neq 3$$

$$\Psi_3(z) = \int_1^z \psi_3(x)dx = \int_1^z \tfrac{1}{3}\eta B_3 x^{-1} dx = \tfrac{1}{3}\eta B_3 \ln z$$

Bezeichne nun $g_n(z)$ die Anzahl der in z verankerten Fermat'schen Gleichungen n-ten Grades. Dann ist z.B. $g_2(24) = 0$, $g_2(25) = 1$, $g_2(4225) = 2$ (wg. $4225 = 65^2 = 16^2 + 63^2 = 33^2 + 56^2$).

$G_n(z)$ sei die Summe aller $g_n(x)$ für x von 1 bis z.

Die Tabelle 9 stellt für $n = 1$ und $n = 2$ die Werte von $G_n(z)$ und $\Psi_n(z)$ einander gegenüber.

z	$G_1(z)$	$\Psi_1(z)$	G_1/Ψ_1
10	16	15,0	1,0650
100	1 522	1 517,3	1,0031
1 000	152 096	151 749,8	1,0023
10 000	15 198 743	15 175 000,0	0,9984

z	$G_2(z)$	$\Psi_2(z)$	G_2/Ψ_2
10	0	0,5	0,0000
100	1	2,1	0,4661
1 000	5	7,3	0,6850
10 000	16	23,6	0,6780
100 000	50	75,1	0,6654
1 000 000	158	238,1	0,6635
10 000 000	505	753,5	0,6702

Tabelle 9

Während für $n = 1$ volle Übereinstimmung besteht, beträgt die tatsächliche Anzahl der Fermat'schen Gleichungen zweiten Grades bis zu einer

Grenze z nur $^2/_3$ des aus der "Grundwahrscheinlichkeit" ψ berechneten Erwartungswertes Ψ . Die Ursache liegt darin, dass es keine in *geraden* Zahlen verankerten Fermat'schen Gleichungen zweiten Gerades mit teilerfremden Komponenten geben kann (s. Anhang 4.6.4). Unter Beachtung der Anmerkung am Ende von Abschnitt 4.3 entfällt damit genau ein Drittel der grundsätzlichen Zerlegungsmöglichkeiten!

Wir berechnen noch die Erwartungswerte $\Psi_n(z)$ für einige n und z in Tabelle 10.

z	$\Psi_3(z)$	$\Psi_4(z)$	$\Psi_5(z)$	$\Psi_6(z)$
10	0,137	0,062	0,035	0,022
100	0,274	0,096	0,049	0,029
1 000	0,412	0,116	0,054	0,031
10 000	0,549	0,127	0,056	0,032
100 000	0,686	0,133	0,057	0,032
1 000 000	0,823	0,136	0,057	0,032
∞	∞	**0,141**	**0,058**	**0.033**

Tabelle 10

4.5 Das Ergebnis

Für $n > 3$ konvergiert bei wachsender Schranke z der Erwartungswert $\Psi_n(z)$ (s. 4.4-2) für die Anzahl der Fermat'schen Gleichungen vom Grade n gegen $\eta \cdot B_n/(n-3)$.

Diese Zahlen sind wesentlich kleiner als 1, so dass hier keine Fermat'schen Gleichungen zu erwarten sind, und dies allein schon aus Gründen der unwahrscheinlichen Koinzidenz einer n-Potenzzahl mit einer Summe aus zwei anderen n-Potenzzahlen wegen ihrer geringen Dichte in der Weite des Zahlen(welt)raumes!

Anders liegen die Verhältnisse für $n = 3$. Zwar ist auch hier bis zur ersten Millionengrenze kaum eine Fermat'sche Gleichung vom Grade 3 zu erwarten, doch konvergiert $\Psi_3(z)$ *nicht*, so dass es insgesamt eigentlich unendlich viele Fermat'sche Gleichungen dritten Grades mit teilerfremden Komponenten geben sollte. Da aber bereits Euler und Gauß bewiesen haben, dass dies nicht der Fall ist, liegen hier offenbar *strukturelle* Zwänge vor, die einem anzubringenden von n abhängigen Korrekturfaktor (der, wie oben gezeigt, im Falle n = 2 den Wert $^2/_3$ hat) hier den Wert 0 zuweisen.

4.6 Anhang

4.6.1 Abschätzung der Konstanten B_n

Mit der vorübergehenden Abkürzung $r := (n-1)/n$ ist $0 \le r < 1$, und mit $0 < v \le 1/2$ folgt:

$$\frac{1}{v^r} < \frac{1}{v^r(1-v)^r} \le \frac{2^r}{v^r}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{v^r}\,dv < \int_0^{1/2} \frac{1}{v^r(1-v)^r}\,dv \le \int_0^{1/2} \frac{2^r}{v^r}\,dv$$

$$\left.\frac{v^{1-r}}{1-r}\right|_0^{1/2} \le n^2 B_n \le 2^r \cdot \left.\frac{v^{1-r}}{1-r}\right|_0^{1/2}$$

$$\frac{2^{r-1}}{1-r} \le n^2 B_n \le \frac{2^{2r-1}}{1-r}$$

Nach Division durch n^2 und Elimination der Abkürzung folgt schließlich die gut brauchbare Abschätzung:

$$\frac{2^{-\frac{1}{n}}}{n} \le B_n \le \frac{2^{1-\frac{2}{n}}}{n} .$$

4.6.2 Berechnung der Konstanten B_n

Das Integral

$$B_n = \frac{1}{n^2}\int_0^{1/2} \frac{1}{v^r(1-v)^r}\,\mathrm{d}v \quad , \quad r = \frac{n-1}{n},\ n \ge 1$$

lässt sich gut numerisch auszuwerten, wenn man zunächst $(1-v)^{-r}$ nach v in eine Taylorreihe entwickelt, diese durch v^r dividiert und anschließend integriert. Auf diesem Wege erhält man eine rasch konvergierende Reihe, die sich mit Computerhilfe leicht berechnen lässt.

B_2 ist übrigens gleich $\pi/8$, da in diesem Falle das Integral

$$B_2 = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}v}{4\sqrt{v(1-v)}}$$

mit Hilfe der Substitution $v = (t+1)/2$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t/2$, $t = 2v - 1$ zum Arkussinus führt:

$$B_2 = \int_{-1}^{0} \frac{dt/2}{4\cdot\sqrt{\frac{1+t}{2}\cdot\frac{1-t}{2}}} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin x\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{8}$$

Dies Ergebnis lässt sich auch leicht geometrisch deuten, wenn man bedenkt, dass alle Gitterpunkte $(x \mid y)$, wobei x, y natürliche Zahlen mit $x \le y$ und $x^2 + y^2 \le z$ sind, genau jenen Achtelsektor des Ursprungskreises mit Radius $\sqrt{z}$ besiedeln, der im ersten Quadranten oberhalb der ersten Winkelhalbierenden liegt. Die Anzahl der Gitterpunkte entspricht (näherungsweise) der Fläche des Sektors und beträgt somit etwa $\pi\cdot z/8$. Dies ist aber genau das Integral der Funktion $\varphi_2(x)$ von 0 bis z, d.h. $\Phi_2(z)$.

4.6.3 Wahrscheinlichkeit der Teilerfremdheit zweier natürlicher Zahlen (Aufgabe von Tschebyschew)

Seien $a, b > 1$ zwei (zufällig ausgewählte) natürliche Zahlen.

a und b sind jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/t$ durch eine Zahl $t \le \min(a,b)$ teilbar.

Beide Zahlen gemeinsam sind dann mit der Wahrscheinlichkeit $1/t^2$ durch t teilbar und haben deshalb mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - 1/t^2)$ die Zahl t *nicht* als gemeinsamen Teiler. Beschränkt man sich auf *Prim*zahlen t als mögliche Teiler von a und b, dann kann man die Ereignisse der Teilbarkeit mit gewisser Berechtigung als "unabhängig" ansehen. Somit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a und b keine gemeinsamen Teiler haben, zu

$$T_{\text{fremd}}(a,b)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{\langle\min(a,b)\rangle^2}\right)$$
$$=\prod_{\substack{t=2\\ t \text{ ist Primzahl}}}^{\langle\min(a,b)\rangle}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

Von Interesse ist natürlich, wie der Wert des Produktes

$$T_{\text{prim}}(m) = \prod_{\substack{t=2\\ t \text{ ist Primzahl}}}^{m}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = \prod_{\substack{t=2\\ t \text{ ist Primzahl}}}^{m}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)$$

von m abhängt und insbesondere, was sich für m gegen unendlich ergibt.

Da jeder zusätzliche Faktor kleiner als eins ist, handelt es sich um eine monoton fallende Folge, so dass der noch unbekannte Grenzwert η jedenfalls kleiner als jedes Glied der Folge ist.

Zur Abschätzung von η nach unten betrachten wir zunächst das Produkt

$$T_{\text{alle}}(m) = \prod_{t=2}^{m}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = \prod_{t=2}^{m}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)$$

welches sich über *alle* natürlichen Zahlen t von 2 bis m erstreckt. Man zeigt leicht durch vollständige Induktion, dass die einfache Beziehung

$$T_{\text{alle}}(m) = \frac{m+1}{2m}$$

besteht, welche sofort den Grenzwert

$$T_{\text{alle}}(\infty) = \lim_{m\to\infty} T_{\text{alle}}(m) = \frac{1}{2}$$

liefert.

Da $T_{\text{alle}}(m)$ gegenüber $T_{\text{prim}}(m)$ zusätzliche Faktoren kleiner 1 enthält, gilt demnach $\eta \ge 0{,}5$.

Streicht man nun aus dem Produkt

$$T_{\text{alle}}(\infty) = \prod_{t=2}^{\infty}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)$$
$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots. = 0{,}5$$

nacheinander diejenigen Faktoren, die *keine* Primzahl enthalten, d.h., multipliziert man 0,5 mit den Kehrwerten der keine Primzahlen enthaltenden Faktoren, so nähert man sich dem Grenzwert η von unten:

$$T_{\text{nichtprim}}(m) = \frac{1}{2}\cdot\prod_{\substack{t=2\\ t \text{ ist nicht Primzahl}}}^{m}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)$$

Mit den Folgen $T_{\text{prim}}(m)$ und $T_{\text{nichtprim}}(m)$ ist somit eine Intervallschachtelung für η gegeben, die sich leicht mit dem Computer auswerten lässt (Tabelle 11):

m	$T_{\text{nichtprim}}(m)$	$T_{\text{prim}}(m)$
2	0,50000	0,75000
10	0,56994	0,62694
100	0,60300	0,60903
1 000	0,60740	0,60800
10 000	0,60787	0,60793

Tabelle 11

Der exakte Wert ist $\eta = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}607927...$.

Man erkennt, dass schon für kleine natürliche *a, b* gilt: Die Wahrscheinlichkeit $T_{\text{fremd}}(a,b)$ dafür, dass *a* und *b* teilerfremd sind, beträgt etwa 0,608 .

4.6.4 Nichtexistenz von in geraden Zahlen verankerten Fermat'schen Gleichungen zweiten Grades mit teilerfremden Komponenten.

Wegen der geforderten Teilerfremdheit müssen die kleineren Komponenten einer etwaigen in einer geraden Zahl verankerten Fermat'schen Gleichung zweiten Grades beide ungerade sein. Dies führt zu dem Ansatz:

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = (2z)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4z^2$$

und nach Division durch 2 zu:

$$2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 1 = 2z^2$$

Diese Gleichung ist widersprüchlich, da offensichtlich die linke Seite ungerade, die rechte aber gerade ist.

Literatur

[1] Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Klett 1978, S. 207-211.

[2] Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1950.

[3] Walz, G.: Lexikon der Mathematik, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2001/02.

Autor

OStD a.D. Uwe E. Fischer
Hinter der Laie 24
57319 Bad Berleburg Aue