Lewis Caroll's Problem des stumpfwinkligen Dreiecks

VON RUMA FALK UND ESTER SAMUEL-KAHN

ÜBERTRAGEN, BEARBEITET UND AKTUALISIERT VON GERHARD KÖNIG

Originaltitel: Lewis Caroll's Obtuse Problem
Teaching Statistics vol.23 (Autumn 2001)3, p.72-75

Zusammenfassung: *Von Lewis Caroll stammt folgendes Problem:*

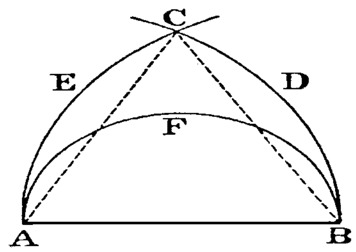
Drei Punkte werden zufällig in einer unendlichen Ebene gewählt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Ecken eines stumpfwinkligen Dreiecks sind.

Eine problematische Problemstellung

Das störende Element in obiger Aufgabenstellung ist die *zufällige Wahl* von Punkten in einer *unendlichen Ebene.* Das ist praktisch und konzeptionell unmöglich. Genau gesagt nahm Caroll an, dass erstens der Stichprobenraum oder die Ereignismenge dieses statistischen Experimentes unendlich sind und zweitens die Dichte gleichmäßig verteilt sei. Diese zwei Voraussetzungen führen jedoch zu Widersprüchen und paradoxen Folgerungen.

Die Dichte einer Verteilungsfunktion – ob diskret oder stetig, univariat oder bivariat kann nur im endlichen Fall gleichmäßig verteilt sein, wenn man das übliche Konzept, dass alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sein sollen, zugrundelegt; dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass Zufallsvariablen auf einem unendlichen Gebiet nicht gleichförmig verteilt sein können.

Caroll argumentiert in seinem Lösungsvorschlag folgendermaßen: Wir nehmen an, dass die drei Punkte ein Dreieck bilden; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie auf einer Geraden liegen, sei also praktisch Null. Nenne die längste Seite des Dreiecks AB und zeichne über der Fläche, die das Dreieck enthält, den Halbkreis AFB (s. Figur rechte Spalte oben). Zeichne dann mit den Mittelpunkten A bzw. B und den Radien AB bzw. BA, die Kreisbögen BDC bzw. AEC, die sich in C schneiden. Weil AB als längste Seite des Dreiecks erklärt wurde, ist klar, dass die Spitze des Dreiecks nicht außerhalb der Figur ABDCE liegen kann. Genau so, wenn sie innerhalb des Halbkreises liegt, ist das Dreieck stumpfwinklig, wenn außerhalb dann spitzwinklig. (Die Chance, dass die Spitze auf dem Halbkreis liegt ist praktisch Null).



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann das Verhältnis der Fläche des Halbkreises zu der der Figur ABDCE. Die Fläche von ABCDE ist das Doppelte der Sektorenfläche ABDC abzüglich der Dreiecksfläche. Mit AB = 2a gilt dann für die Gesamtfläche:

$$= 2.\frac{4\pi a^2}{6} - \sqrt{3}.a^2 = a^{2}.\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right);$$

Damit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Wenn man die Rechnung zu Ende führt, ergibt sich ein Wahrscheinlichkeit von etwa 0,6394

Schaut man sich Caroll's Lösung genauer an, so stellt man fest, dass er in der Tat die Gleichverteilung ausnutzte, allerdings nur für den Fall der inneren Region begrenzt durch ABDCE. Der errechnete Wert von etwa 0,64 ist die richtige Antwort für ein anderes Problem. Dieses müsste folgendermaßen lauten:

Gegeben seien zwei beliebige Punkte A und B. Ein Dreieck werde so konstruiert, dass ein Punkt C zufällig aus einem endlichen Gebiet gewählt wird, sodass AB längste Seite dieses Dreiecks ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei dieser Auswahl ein stumpfwinkliges Dreieck?

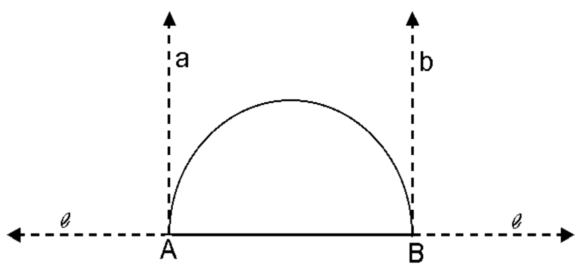
Zurück zur Originalproblemstellung, in der drei Punkte zufällig in einer unendlichen Ebene gewählt werden! Der Fehler in der obigen Lösung liegt in der Annahme der Existenz eines solchen Dreiecks unter der vorgestellten Prozedur. Diese Annahme wurde nicht hinterfragt.

Ableitung eines Widerspruches

Die Ungültigkeit der Carollschen Voraussetzungen würde offensichtlicher werden, wenn eine andere Lösung desselben Problems unter denselben (falschen) Annahmen gewonnen werden könnte und sich dadurch ein Paradoxon ergäbe.

Nach Caroll nehmen wir an, dass die drei Punkte gewählt seien und ein Dreieck bilden. Sei AB eine Seite dieses Dreiecks. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf die obere Hälfte der Ebene als Stichprobenraum für die zufällige Auswahl des dritten Punktes beschränken (oberhalb der Geraden l, s. untere Abbildung).

Die Zufallswahl des dritten Punktes, C (bis jetzt noch nicht markiert), ergibt ein stumpfwinkliges Dreieck, wenn Winkel ACB, Winkel CAB oder Winkel CBA stumpf sind. Diese drei Ereignisse sind paarweise unabhängig, sodass wir nur ihre drei Wahrscheinlichkeiten zu addieren brauchen, um die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung zu erhalten. Wir nehmen gleichförmige Verteilung auf der gesamten Ebene an. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Winkel ACB stumpf ist, kann vernachlässigt werden, weil das nur geschehen kann, falls Punkt C in den Halbkreis mit Durchmesser AB fällt. Das Gebiet ist jedoch vernachlässigbar gegenüber den unendlichen Ereignisraum. Jedoch gilt $P(\angle CAB > 90^0) = ½$, weil $\angle CAB$ stumpf ist, wenn C auf der linken Seite von a liegt. Entsprechend gilt $P(\angle CBA > 90^0) = ½$, weil das die Wahrscheinlichkeit für einen zufällig gewählten Punkt auf der rechten Seite von b ist.



Das Ergebnis P(stumpfwinkliges Dreieck) ist ½+½ = 1 im Widerspruch zum obigen Ergebnis von etwa 0,64

Die Gewinnung voneinander abweichender Lösungen zu einem Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten nicht ungewöhnlich und z.B. beim Bertrandschen Paradoxon bekannt geworden. Etwas Paradoxes ergibt sich jedoch nur, wenn die Aufgabe nicht eindeutig gestellt ist, z.B. wenn man die zugrundeliegende Art der Zufälligkeit verschieden auffasst. Im Falle der Carollschen Lösung ergeben sich die widersprüchlichen Ergebnisse aus der Wahl „dreier Zufallspunkte auf einer unendlichen Ebene“. Dies führt zu verschiedenen Lösungswegen und den damit verbundenen verschiedenen Ergebnissen.

Lösungsmöglichkeiten

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit für ein zufälliges stumpfwinkliges Dreieck? Dazu betrachten wir statt einer unendlichen Ebene eine gleichförmige Verteilung auf einem sehr großen nXn-Quadrat. Wenn man es sich genau überlegt, kann die Antwort auf unsere Frage nicht von der Größe des Gebietes abhängen, aus dem die Punkte zufällig entnommen werden; wohl aber von dessen Form, nämlich hier eines Quadrates. Der Wechsel der Seitenlängen eines Quadrates, kann als der bloße Wechsel der Längeneinheit interpretiert werden. Daher kann n=1 angenommen werden. Auf der anderen Seite kann n unbegrenzt wachsen, ohne dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit verändert wird. Dies kommt wahrscheinlich Caroll’s Intentionen am nächsten.

Eine analytische Antwort auf unsere Frage ist etwas schwerer zu finden; wir behelfen uns mit Computer-Simulationen. (s. aber den letzten Abschnitt)

Ein Dreieck heißt stumpfwinklig, wenn einer der Winkel, etwa γ, ein stumpfer Winkel ist. Nach dem Kosinussatz gilt:

$$\cos(\gamma) = a^2+b^2+c^2/\ 2*a*b$$

wenn γ der Winkel gegenüber der Seite c ist. Für einen Winkel größer als 90, muss cos (γ)<0 gelten.

Damit ein schiefwinkliges Dreieck vorliegt, muss daher eine der vorliegenden Ungleichungen erfüllt sein: $a^2 + b^2 < c^2$, $b^2 + c^2 < a^2$, $c^2 + a^2 < b^2$.

Nach diesen Überlegungen nun zur Lösung unseres Problems mittels Computersimulation. Der Zufallsgenerator wähle zufällig die 6 Zufallszahlen X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 gleichverteilt auf dem Intervall [0,1] und unabhängig voneinander. Die drei Punkte (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) sind dann zufällig gewählte Punkte im Einheitsquadrat. Die drei Seiten des Dreiecks der drei zufällig gewählten Punkte seien S_1, S_2, S_3.

Nun bilden wir die Zufallsvariable Z folgendermaßen:

$Z = 1$, wenn $S_1^2 + S_2^2 \leq S_3^2$ oder $S_1^2 + S_3^2 \leq S_2^2$ oder $S_2^2 + S_3^2 \leq S_1^2$.
$Z = 0$, sonst.

Nach obiger Erklärung gilt $Z = 1$ dann und nur dann, wenn unser zufällig erzeugtes Dreieck stumpfwinklig ist.

Wir führten das Experiment über eine Million Male aus. Der Anteil der erhaltenen schiefwinkligen Dreiecke betrug 0.7249 mit einem Standardfehler von 0.00045, also ein wenig größer als Caroll's Wert von 0.6394.

Ähnliche Simulationen (auch etwa 10^6-mal) wurden über andere geometrische Flächen als Zufallsraum durchgeführt: Kreise, gleichseitige Dreiecke, sowie Rechtecke mit einem Seitenverhältnis Breite zu Länge 1:k, wobei k zwischen 2 und 20 variierte. (s. Tabelle 1) Wenn man die Größe dieser Flächen unendlich wachsen lässt, dann erhalten wir drei beliebig gewählte Punkte in einer unendlichen Ebene. Die Art der zugrundeliegenden Fläche als Zufallsraum beeinflusst also die gesuchte Wahrscheinlichkeit, ein schiefwinkliges Dreieck zu erhalten. Für Rechtecke mit einem Verhältnis von 1:20 zwischen Breite und Länge ist die Wahrscheinlichkeit fast 1. In allen diesen Fällen ist also die Wahrscheinlichkeit größer als nach Caroll's Antwort.

Tabelle 1: Durch Simulationen geschätzte Wahrscheinlichkeiten, ein stumpfwinkliges Dreieck zu erhalten in Abhängigkeit von der als Zufallsraum gewählten Fläche.

Fläche	**Geschätzte Wahrscheinlichkeit**	**Standardfehler**
Kreis	.7201	.00045
Quadrat	.7249	.00045
Gleichseitiges Dreieck	.7484	.00043
Rechteck 1:*k*		
k=2	.7987	.00040
k=5	.9324	.00025
k=8	.9660	.00018
k=11	.9795	.00014
k=14	.9861	.00012
k=17	.9899	.00010
k=20	.9924	.00009

Schlussfolgerungen

Unsere didaktische Lektion aus dieser Klasse geometrischer Probleme ist ein gesteigertes Bewusstsein, die gegebenen Voraussetzungen genauer zu analysieren. Mehrdeutige und unvernünftige Voraussetzungen haben schon häufig zu Schwierigkeiten und widersprechenden Ergebnissen bei wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen geführt. Bei Caroll's Problem waren z.B. die Voraussetzungen nicht genau aufgeführt oder gar nicht erwähnt.
Was heißt nun „zufällig" genauer? Dieses Problem wird allgemein bei Portnoy, 1994 diskutiert und am Beispiel des Carollschen Problems illustriert. Seine Schlussfolgerung: Zufällig heißt Wahl der gleichförmigen Verteilung. Da es aber bei Problemen geometrischer Wahrscheinlichkeiten unter dieser Voraussetzung keine eindeutigen Antworten oder Lösungen gibt, sind alle gleich gut oder gleich schlecht.

Ausblick auf analytische Lösungen

Wie bereits vorne angedeutet, sind analytische Lösungen nicht einfach zu erhalten und zusätzlich abhängig von der gewählten endlichen Ausgangsfläche. Dies wird auch aus der Tabelle 1 mittels Simulationen deutlich. Guy (1993) gibt eine Reihe von Lösungen des Problems. Woolhouse (1986) löste es mittels gleichförmig verteilter Punkte auf einem Einheitskreis und erhielt:

$$P_2 = 1 - \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{8} - \frac{4}{\pi^2} = 0.719715\ldots.$$

Langford (1970) leitet eine Formel ab für die Wahrscheinlichkeit P(L), dass drei in einem Rechteck mit den Seiten 1 und L zufällig gewählte Punkte ein stumpfwinkliges Dreieck bilden. Mit „zufällig" meint der Autor ebenfalls Gleichverteilung und Unabhängigkeit jeder der 6 Koordinaten. Die allgemeine Formel ist sehr komplex, aber zwei Fälle sind von besonderem Interesse. Für den Fall L = 1, also wenn das Rechteck ein Quadrat ist, erhält der Autor $P(1) = 97/150 + \pi/40 = 0.72520648\ldots$ Die von den Autoren durch Simulation für diesen Fall erhaltene Wahrscheinlichkeit von .7249 ist eine ausgezeichnete Schätzung! Dies gilt auch für den Fall k=2. Denn hier erhält der Autor: $P(2)= 1199/1200 + 13\,\pi/128 - (3/4)\log 2 = 0.79837429\ldots$

Um die Problematik bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten und des dortigen Zufallsbegriff vollends aufzuzeigen soll nur erwähnt werden, dass Portnoy (1994) eine Wahrscheinlichkeit von ¾ erhält. Er identifiziert die Menge der Dreiecke in der Ebene mit dem sechsdimensionalen Raum R^6 und geht von sphärisch symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf R^6 aus. Portnoy nimmt an, dass die sechs Koordinaten der drei Punkte das Ergebnis von je 6 unabhängigen Normalverteilungen mit Mittelwert 0 und Varianz 1 sind. Für dieses kugelsymmetrische Maß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig erzeugtes Dreieck stumpfwinklig ist, nach Portnoys Argumentation ¾.
Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die analytisch erhaltenen Werte sich geringfügig von denen unterscheiden, die durch Simulationen gewonnen wurden.

Literatur

Buchta, C. :A Note on the Volume of a Random Polytope in a Tetrahedron. *Illinois J. Math.* **30**, 653-659, 1986.

Carroll, L. (1958). *Pillow Problems and a Tangled Tale*. New York: Dover (*Pillow Problems* – originally published in 1895)

Eisenberg, B. and Sullivan, R. "Random Triangles *n* Dimensions." *American Mathematical Monthly* **103**, 308-318, 1996.

Guy, R. K. :There are Three Times as Many Obtuse-Angled Triangles as There are Acute-Angled Ones. *Mathematical Magazine* **66**, 175-178, 1993.

Hall, G. R. :Acute Triangles in the *n*-Ball. *J. Appl. Prob.* **19**, 712-715, 1982.

Langford, Eric: A problem in geometrical probability. In: Mathematical Magazine 43(1970), S. 237-244

Nickerson, R.S. (1996): Ambiguities and unstated assumptions in probabilistic reasoning. *Psychological Bulletin,* **120**, 410-433.

Portnoy, S. "A Lewis Carroll Pillow Problem: Probability on at Obtuse Triangle." *Statist. Sci.* **9**, 279-284, 1994

Woolhouse, W. S. B. Solution to Problem 1350. *Mathematical Questions, with Their Solutions, from the Educational Times, 1.* London: F. Hodgson and Son, 49-51, 1886.