Das Problem der vertauschten Briefe – zwei Wege zur Herleitung einer Rekursionsformel

HENRIK KRATZ, FRANKFURT

Zusammenfassung: Das Problem der vertauschten Briefe gehört zu den klassischen Problemlöseaufgaben in der Kombinatorik. Die Analyse einer Unterrichtsstunde zeigt, dass es zwei unterschiedliche Wege gibt, um eine Rekursionsformel herzuleiten, mit der die Anzahl der „komplett falschen“ Anordnungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Briefe beschrieben werden kann.

1 Das Problem

In vielen Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitstheorie findet sich folgende Übungsaufgabe:

Eine zerstreute Sekretärin verteilt n Briefe zufällig auf n bereits adressierte Briefumschläge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich jeder Brief im richtigen Umschlag?

Die Lösung $p = 1/n!$ ergibt sich durch Abzählen aller Anordnungsmöglichkeiten und Anwenden der Regel für Laplace-Experimente. Aus dieser Standardaufgabe entsteht eine anspruchsvolle Problemlöseaufgabe, wenn man die Fragestellung umkehrt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich kein Brief im richtigen Umschlag?

Es handelt sich dabei um die Einkleidung eines klassischen Problems der Kombinatorik, nämlich der Frage, wie viele fixpunktfreie Permutationen von n Gegenständen es gibt, das heißt, auf wie viele Arten n Gegenstände angeordnet werden können, so dass kein Gegenstand seinen ursprünglichen Platz beibehält (siehe Engel (1973), S. 34f). [1]

2 Die Bearbeitung des Problems

Das Problem der vertauschten Briefe wurde den Schülern eines Leistungskurses Mathematik am Ende der Einheit zur Kombinatorik in der Jahrgangsstufe 12 präsentiert. Die Bearbeitung des Problems und die anschließende Reflexion der Problemlösung umfassten insgesamt drei Doppelstunden. Zunächst sollen die wesentlichen Schritte, Barrieren und Hilfen auf dem Weg zur Lösung des Problems umrissen werden.

Unmittelbar nach der Vorstellung der Aufgabe wird vom Kurs spontan folgender Lösungsvorschlag geäußert. Um den ersten Brief so zu verteilen, dass er nicht im richtigen Umschlag landet, gibt es n-1 „falsche“ Plätze, also n-1 Möglichkeiten, für den zweiten Brief dann nur noch n-2 Möglichkeiten usw. Diese Überlegung führt die Schüler darauf, dass es insgesamt $(n-1)!$ Möglichkeiten geben müsse, um alle n Briefumschläge falsch zu verteilen und die gesuchte Wahrscheinlichkeit demnach $p_n = (n-1)!/n! = 1/n$ betrage. Um ihre Argumentation zu überprüfen, notieren die Schüler systematisch alle „falschen“ Anordnungsmöglichkeiten für die ersten $n \geq 2$.

n=2: 21

n=3: 231; 312

n=4: 2143; 2341; 2413; 3142; 3412; 3421; 4123; 4312; 4321.

Während die Auflistung die Vermutung für n=2 und n=3 bestätigt, zeigt sich plötzlich bei n=4, dass der Lösungsvorschlag nicht richtig sein kann. Es ergeben sich nicht, wie erwartet, (4-1)!=6, sondern sogar 9 Möglichkeiten, die 4 Briefe falsch zu sortierten. Die Schüler waren zu ihrer irrtümlichen Lösung gelangt, weil sie ohne größeres Nachdenken auf eine Erklärung zurückgegriffen haben, die ihnen im Verlauf der Einheit Kombinatorik unmittelbar vertraut geworden ist, nämlich die Abzählstrategie für das Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge. Die Einschränkung, dass die Kugel mit Nr. 1 (Nr. i) in diesem Fall ohne Wertung zurückgelegt werden muss, sofern sie an erster (i-ter) Stelle gezogen wird, wollten die Schüler berücksichtigen, indem sie mit $(n-1)!$ statt mit $n!$ rechnen. Dass dieses Modell die vorliegende Situation nicht adäquat beschreibt, lässt sich auch erkennen, wenn man das Ende des Verteilungsvorgangs betrachtet. Für den letzten Brief bleibt nur noch ein Umschlag übrig, in den der Brief zwangsläufig hineingesteckt werden muss. Wenn es sich dabei um den richtigen Umschlag handelt, kann diese Zuordnung durch Zurücklegen nicht mehr verändert werden, das heißt das Modell stellt überhaupt nicht sicher, dass sich eine durchgängig falsche Anordnung ergibt. Den Schülern ist diese Unstimmigkeit allerdings nicht aufgefallen, da sie den Verteilungsvorgang gedanklich nicht konsequent bis zum Ende durchgespielt haben,

[1] Die Menge der Fixpunkte einer Permutation besteht ja gerade aus solchen Elementen, die bei der Abbildung wieder auf sich selbst treffen. Deshalb bezeichnet man Probleme dieser Art auch als Rencontre-Probleme.

sondern sofort dazu übergegangen sind, ihren Lösungsansatz anhand der Beispiele für kleine n zu überprüfen.

Trotzdem erweist sich der intuitive Lösungsvorschlag als hilfreich, weil die Schüler nun erkennen, warum ihre einfache Argumentation fehlschlägt. Ein Schüler erklärt: „Nachdem der erste von vier Briefen einsortiert wurde, bleiben für den folgenden Brief nicht immer nur zwei, sondern manchmal sogar drei weitere Möglichkeiten der Sortierung.“ Auf die gleiche Weise hätten die Schüler bereits bei n=3 bemerken und begründen können, dass ihr Ansatz fehlerhaft ist. Nachdem eine Einsortierung der Form x1x erfolgt ist, sind für den zweiten Brief zunächst ebenfalls zwei Einsortierungen möglich. Vermutlich wurde der Fall n=3 nicht mehr kritisch hinterfragt, weil die Schüler die zwei „falschen“ Anordnungsmöglichkeiten schnell durch Probieren gefunden hatten, ohne sich darüber Rechenschaft abzulegen, ob dieses Ergebnis tatsächlich durch ihr Verteilungsmodell erklärbar ist. Dass die Schüler Unstimmigkeiten bzw. mögliche Vereinfachungen ihrer Argumentation übersehen, zeigt, wie unreflektiert Problemlöseprozesse anfangs verlaufen können.

Nach der Diskussion des ersten Lösungsvorschlags folgt eine Phase, in der die Schüler das - nun wieder offene - Problem in Gruppen eingehender untersuchen. Als Material erhalten sie Briefumschläge und „Briefe“ in Form von Karteikarten, mit denen der Verteilungsvorgang enaktiv durchgeführt werden kann. Während der Arbeit führt jede Gruppe eine eigene Abkürzung für die Anzahl der Möglichkeiten ein, alle n Briefe in falsche Umschläge zu stecken. Der Einheitlichkeit halber soll diese Anzahl hier mit A_n bezeichnet werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_n ließe sich dann leicht als $A_n/n!$ berechnen. Ausnahmslos alle Gruppen versuchen, auf direktem Weg einen allgemeinen Term für A_n zu finden. Keine Gruppe kommt dabei zu einem Ergebnis, weil an dieser Stelle eine wesentliche Schwierigkeit des Problems zum Tragen kommt. Beim Übergang zum nächst größeren n treten die bereits gefundenen und als Ziffernfolge dargestellten „falschen“ Anordnungsmöglichkeiten nicht wieder als Blöcke innerhalb der größeren Ziffernfolgen auf, so dass ein direkter Rückbezug auf frühere Ebenen - gewissermaßen als „Bausteine“ - nicht möglich ist. Die Schüler können die Aufgabe deshalb nicht durch mechanisches Abzählen lösen, sondern müssen eine übergeordnete Argumentation entwickeln. Wolpers und Götz zeigen, wie man die Anzahl A_n explizit berechnen kann, indem man Abbildungen mit bestimmten Fixpunkten unterscheidet und die Einschalt- und Ausschaltformel verwendet, um Mehrfachzählungen zu erfassen (Tietze et al. (2002), S. 271). Da dieser verhältnismäßig komplexe Ansatz in der ersten Problemlösephase von keiner Gruppe verfolgt wird, erhalten die Schüler als strategische Hilfe den Hinweis, eine Rekursionsformel für A_n zu entwickeln. Aufgrund dieser Hilfe und unter Verwendung der Umschläge und Karteikarten gelangen 4 der insgesamt 6 Gruppen schließlich zu einem Ergebnis. Bei der Präsentation der Lösungen stellt sich heraus, dass es zwei verschiedene Wege gibt, mit denen die Rekursionsformel für A_n begründet werden kann.

Weg I: Christine führt die Lösung ihrer Gruppe vor. Vor ihr liegen 5 leere Briefumschläge, die sie nun mit Briefen zu füllen beginnt (Abb. 1). Gleichzeitig erläutert sie ihre Überlegungen. „Den ersten der 5 (bzw. n)[2] Briefe, zum Beispiel die Nr. 1, stecke ich in einen der falschen Umschläge, zum Beispiel den zweiten. Dafür gibt es 4 (bzw. n-1) Möglichkeiten.“

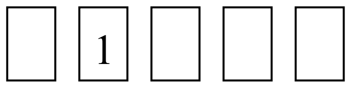
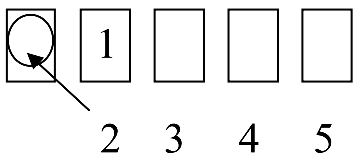


Abb. 1: Christines Ausgangssituation

Nun ist der Gruppe aufgefallen, dass man beim weiteren Verteilen der Briefe zwei Fälle unterscheiden muss (Abb. 2).

Fall I a):



Fall I b):

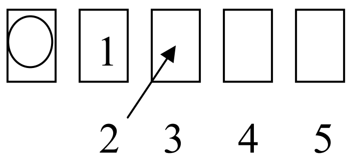


Abb. 2: Christine unterscheidet zwei Fälle beim Verteilen der Briefe

Fall a): Der Brief Nr. 2, dessen Umschlag bereits besetzt ist, wird in Umschlag 1 gesteckt, in den Umschlag, dessen zugehöriger Brief schon verteilt wurde. Dann bleiben die Briefe 3, 4, 5 übrig. Für

[2] Während des Problemlösens haben die Gruppen die Rekursionsformel zunächst für das konkrete Beispiel n=5 erarbeitet und anschließend verallgemeinert. Diese heuristische Strategie wurde auch bei der Präsentation verfolgt. Nachdem die Gruppen ihre Lösungen für n=5 vorgeführt hatten, wurde im Kursverband überlegt, wie man die einzelnen Schritte verallgemeinern kann. Die Rekursionsformel gilt für $n \geq 3$, sofern $A_1=0$ gesetzt wird.

drei (bzw. n-2) Briefe ist die Lösung aber schon bekannt! Es gibt A_3 (bzw. A_{n-2}) Möglichkeiten, diese Briefe falsch anzuordnen. Bisher sind es also $4 \cdot A_3$ (bzw. $(n-1) \cdot A_{n-2}$) Möglichkeiten.

Fall b): Der Brief Nr. 2, dessen Umschlag bereits besetzt ist, wird nicht in Umschlag 1 gesteckt, sondern in einen der anderen Umschläge. Diese Einschränkung bedeutet, dass jetzt die 4 (bzw. n-1) restlichen Briefe auf 4 (bzw. n-1) Umschläge zu verteilen sind, wobei es für jeden Brief genau einen Umschlag gibt, der für ihn „Tabu“ ist, das heißt, in den er nicht hineingesteckt werden darf. Dies entspricht dem „falschen“ Verteilen von 4 Briefen auf 4 Umschläge, wofür es A_4 (bzw. A_{n-1}) Möglichkeiten gibt. Damit liefert Fall b) zusätzlich $4 \cdot A_4$ (bzw. $(n-1) \cdot A_{n-1}$) Möglichkeiten.

Zusammengefasst gilt demfach: $A_5 = 4 \cdot (A_4 + A_3) = 4 \cdot (9+2) = 44$. Dieses Ergebnis wird von den Gruppen bestätigt, die sich die Mühe gemacht haben, alle Möglichkeiten für n=5 einzeln aufzuschreiben und durchzuzählen. Allgemein erhält Christine die Rekursionsgleichung $A_n = (n-1) \cdot (A_{n-1} + A_{n-2})$.

Weg II: Anschließend präsentiert Sven die Lösung seiner Gruppe. „Um die Lösung für n=5 herauszufinden, sind wir davon ausgegangen, dass wir schon 4 Umschläge falsch befüllt haben. Dafür gibt es 9 (bzw. A_{n-1}) Möglichkeiten.“ Im Gegensatz zu Christine, die mit 5 leeren Umschlägen begonnen hatte, liegen vor ikm 4 bareits falsch befüllte Umschläge. In der Hand hält er den feh4enden fünften Umschlag, in dem noch der *richtige* Brief steckt (Abb. 3).

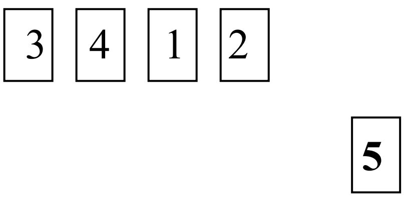


Abb. 3: Svens Ausgangssituation

„Damit am Ende alle Briefe falsch sortiert sind, muss ich den neuen, fünften (bzw. n-ten) Brief mit einem der anderen Briefe vertauschen. Das geht auf 4 (bzw. n-1) Arten, so dass sich daraus $4 \cdot A_4$ (bzw. $(n-1) \cdot A_{n-1}$) Möglichkeiten ergeben.“ Dies soll Fall II a) genannt werden. „Beim Probieren haben wir aber gemerkt, dass das noch nicht ausreicht. Man kann eine falsche Anordnung auch bekommen, wenn es vorher *genau einen* richtig sortierten Brief gibt, der dann mit dem fünften (bzw. n-ten) Brief vertauscht wird. Dafür, dass genau ein Brief richtig sortiert ist, gibt es $4 \cdot A_3$ (bzw. $(n-1) \cdot A_{n-2}$) Möglichkeiten, weil man sich zuerst für einen richtigen Brief entscheiden und die drei (bzw. n-2) übrigen dann falsch verteilen muss.“ Dies ist Fall II b). Sven fasst beide Tauschmöglichkeiten (Abb. 4) zusammen und erhält dieselbe Rekursionsgleichung wie Christine.

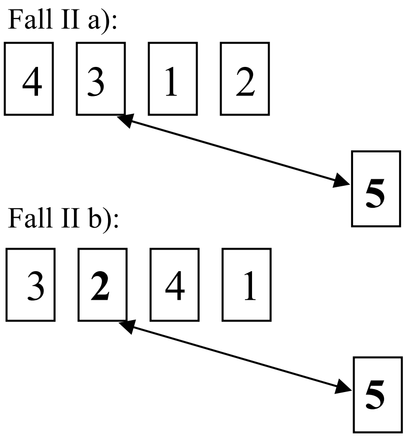


Abb. 4: Sven unterscheidet zwei Fälle beim Tauschen der Briefe

3 Reflexion der Unterschiede zwischen den beiden Wegen

Die Herleitungen der Rekursionsformel von Sven und Christine[3] sind äquivalent. Beide Fallunterscheidungen können einander sogar direkt zugeordnet werden. Christines Fall I a) erfasst jene Anordnungsmöglichkeiten, die Sven im Fall II b) berücksichtigt, während der Fall I b) genau dem Fall II a) entspricht. Trotzdem brauchen die Schüler eine ganze Weile, um dies zu erkennen und die Bezüge zwischen den beiden Lösungen herzustellen. Das ist kein Zufall, denn die beiden Herleitungen unterscheiden sich im Hinblick auf die ihnen zugrunde liegenden Denkwege. Christine versucht das Ziel, die komplette Unordnung, zu erreichen, indem sie die Briefe sukzessive „falsch“ auf die noch leeren Umschläge verteilt, das heißt sie führt die Abbildung *Briefe → Umschläge* tatsächlich durch. Während des Abbildens entdeckt sie, dass sie sich auf frühere Verteilungsvorgänge beziehen kann und den Prozess gar nicht bis zum Ende durchzuführen braucht. Ihre Fallunterscheidung ist notwendig, weil es innerhalb des Verteilungsvorganges eine Weiche gibt, das heißt sie entdeckt einen Punkt, an dem die gesamte Verteilungsprozedur in zwei disjunkte Teilprozeduren zerfällt. Um diese Vorgehensweise zu charakterisieren, wurde im Unterricht für Christines Lösung die Bezeichnung „vorwärtsorientiertes“ Arbeiten verwendet. Dagegen wurde

[3] Im Unterrichtsgespräch haben die Schüler von „Christines“ und „Svens“ Lösungen gesprochen, obwohl es sich um die Ergebnisse von Gruppenarbeiten handelte. Diese vereinfachende Sprechweise soll hier ebenfalls verwendet werden.

Svens Vorgehen als ein „rückwärts-orientierter" Weg bezeichnet. In seiner Argumentation geht er von der Voraussetzung aus, dass n-1 Briefe bereits falsch verteilt sind und versucht nun, den n-ten, neu hinzukommenden Brief in die bestehende Unordnung zu integrieren. Dies gelingt ihm, indem er den Brief im n-ten Umschlag mit einem anderen Brief vertauscht. Während Christines Herleitung den Aspekt des *Abbildens* betont, führt Sven eine *Transposition* (Vertauschung zweier Elemente) durch. Seine Fallunterscheidung ergibt sich daraus, dass es zwei frühere Anordnungen gibt, die durch eine Transposition auf eine neue durchgängig falsche Anordnung führen.

Im Sinne der Terminologie, die für das Problemlösen im Mathematikunterricht gebräuchlich ist, handelt es sich allerdings bei beiden Vorgehensweisen um ein Rückwärtsarbeiten. Das Ziel der Problembearbeitung, eine Rekursionsformel für die Anzahl A_n zu finden, wird in beiden Fällen erreicht, indem auf vorherige Anzahlen zurückgegriffen wird. Der Unterschied der Wege besteht in der Art und Weise, wie vorherige Anzahlen in die Argumentation einbezogen werden.

In dieser Stunde hat es sich als fruchtbar erwiesen, ausführlich zu diskutieren, worin die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Lösungswege bestehen. Dadurch ist heuristisches Wissen entstanden, das über die Lösung des konkreten Problems hinausreicht. Um dies weiter zu verankern, haben die Schüler die Aufgabe erhalten, einen Bericht zu verfassen:

Schreiben Sie einen Bericht, in dem Sie beide Lösungswege darstellen und miteinander vergleichen. Erläutern Sie, welcher Lösungsweg Ihnen persönlich leichter verständlich erscheint und begründen Sie auch warum.

Die Absicht dieser Aufgabe war es, die Schüler ihre eigenen Vorlieben erkennen zu lassen und ihr Bewusstsein für verschiedene Wege zu schärfen. Während einige Schüler zwar eindeutig ihre Vorlieben benennen konnten, aber noch nicht in der Lage waren, Gründe dafür anzugeben, gelang anderen eine zum Teil sehr differenzierte Reflexion. Es folgen einige Zitate aus den Berichten.

Gian: „Mir leuchtet Svens Weg einfach mehr ein. Woran das genau lag, weiß ich auch nicht. Ich denke, jeder hat halt eine bestimmte Denkweise, die ihn entweder auf den einen oder anderen Weg führt."

Viola: „Svens Lösung ist länger, erscheint mir aber logischer bzw. ich verstehe es (meine Lösung sah so ähnlich aus!)"

Christine: „Mir erscheinen beide Lösungswege im Nachhinein gleich gut verständlich, ich fand es aber leichter, vorwärts auf die Lösung hinzuarbeiten und sich vorzustellen, wie man die Briefe nacheinander in die Umschläge stecken kann, so dass sich alle im falschen befinden."

Christoph: „Svens Lösung ist für mich leichter verständlich, da die „Ausnahmen" am Schluss berechnet werden und nicht mittendrin. Der Beginn mit 4 Briefen ist interessant, aber auch (für mich) sehr plausibel und stellt eine gute Basis für den Anfang dar, da hier schon durch die Rechnung $4 \cdot 9 = 36$ eine große Anzahl von Möglichkeiten mit diesem einfachen Sachverhalt berechnet werden."

Hanna: „Christine beginnt ganz von vorne. Sie hat noch keinen Brief eingeordnet und überlegt sich die Möglichkeiten, während sie die Briefe einsortiert. Die wesentlichen Schritte zur Lösung verlaufen bei ihr im Kopf. Sven hingegen hat bereits vier Briefe einsortiert. Er kann darauf zurückgreifen und leichter durchspielen, wie viele Möglichkeiten es gibt. Er hat das „Handmaterial" sozusagen griffbereit vor sich liegen und könnte, wenn er wollte, jeden Brief der 9 Möglichkeiten, 4 Briefe falsch einzuordnen, mit dem 5. tauschen. ... Für mich ist Svens Weg anschaulicher und verständlicher. Ich finde es leichter, Dinge nachzuvollziehen, wenn ich sie sozusagen „direkt vor meinem Auge habe". Weiterhin ist die Fallunterscheidung meiner Meinung nach leichter bei dem rückwärts-orientierten Weg zu durchschauen. Der vorwärts-orientierte Weg erscheint mir zu kompliziert und teilweise zu theoretisch. … Ich werde mich auch zum Lösen von weiteren Problemen an den rückwärts-orientierten Weg halten. Es könnte allerdings auch sein, dass ich dann feststelle, dass mir der vorwärtsorientierte Weg leichter fällt. Ich kann mir gut vorstellen, dass die Wahl der verschiedenen Lösungswege von dem Problem selbst abhängt. Das, was mir einmal sinnvoll erscheint, kann beim nächsten Mal wohl auch sehr unverständlich sein. Das Beste ist wohl, ich merke mir einfach beide Wege und versuche durch häufigeres Anwenden meine persönlich bessere Lösungsstrategie zu finden."

Insgesamt bevorzugten etwa zwei Drittel der Schüler im Kurs den Weg von Sven. Die Zitate von Christoph und Hanna zeigen, dass Svens Weg als anschaulicher empfunden wird, weil er von bereits gefundenen Anordnungen ausgeht, während bei Christines Weg mehr Schritte rein gedanklich vollzogen werden müssen. In Schulbüchern und in der didaktischen Literatur wurde bisher – soweit sie dem Autor bekannt sind – zur Herleitung der Rekursionsformel nur der Weg von Christine vorgestellt (siehe z.B. Lambacher-Schweizer (2003), S.

103 oder Engel (1973), S. 34f). Vor dem Hintergrund der Schülerberichte soll deshalb hier vorgeschlagen werden, den Weg von Svens Gruppe insbesondere in Schulbüchern stärker zu berücksichtigen.

4 Schlussbemerkungen

Die Wahrscheinlichkeit p_n, dass sich kein Brief im richtigen Umschlag befindet, haben die Schüler mit Hilfe von Excel berechnet (siehe Abb. 5).

n	A_n	$p_n = A_n/n!$
1	0	0
2	1	0,5
3	2	0,33333333
4	9	0,375
5	44	0,36666667
6	265	0,36805556
7	1854	0,36785714
8	14833	0,36788194
9	133496	0,36787919
10	1334961	0,36787946

Abb. 5: Excel-Tabelle zur Berechnung von p_n

Für alle Schüler war es erstaunlich, dass sich p_n mit wachsendem n dem Grenzwert 0,367…[4] nähert. Interessanterweise widerspricht dieses Ergebnis zwei intuitiven Fehlvorstellungen, die sich diametral gegenüberstehen. Ein Teil der Schüler war ursprünglich der Ansicht, dass p_n für eine große Anzahl von Briefen ebenfalls groß werden bzw. sich sogar dem Wert 1 nähern müsse. („Es ist ja umso leichter, alle Briefe falsch zu sortieren, je mehr Briefe zur Verfügung stehen.") Wie es zu diesem scheinbaren Paradoxon kommt, wird von Wolpers und Götz dargelegt: „Der Irrtum liegt darin, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit (dass irgendjemand den richtigen Brief bekommt) mit jener verwechselt wird, dass *ein bestimmter* (und nicht irgendein) Brief richtig kuvertiert wird: Diese Wahrscheinlichkeit ist $1/n$…und sie wird tatsächlich für große n sehr klein." (Tietze et al. (2002), S. 272) Dagegen war ein anderer Teil der Schüler davon überzeugt, dass p_n gegen den Wert 0 streben müsse. („Bei sehr vielen Briefen wird es doch immer wahrscheinlicher, dass sich, sozusagen aus Versehen, mal ein Brief im richtigen Umschlag befindet.") Die zweite Fehlvorstellung entspricht dem oben diskutierten ersten Lösungsvorschlag des Kurses, der auf die Wahrscheinlichkeit $p_n = 1/n$ führte. Unter Umständen handelt es sich dabei auch um die Bildung eines Erwartungswertes, der die Abhängigkeiten beim Verteilen der Briefe außer acht lässt: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Brief im richtigen Umschlag steckt ist $1/n$. Wenn ich alle n Briefe auf die Umschläge verteile, erwarte ich, dass im Mittel $n \cdot 1/n = 1$, also ein Brief, richtig sortiert ist."

Abschließend soll festgestellt werden, dass sich die Schüler vom Problem der vertauschten Briefe herausgefordert fühlten und sehr motiviert an dessen Lösung gearbeitet haben, obwohl es offensichtlich war, dass es sich nicht um einen realistischen Anwendungskontext handelt und der Knobelcharakter im Vordergrund steht. Ähnliche Beobachtungen hat Roth bei zwei algebraischen Problemlöseaufgaben gemacht, die sie in einer 8. Klasse behandelt hat. „Für mich ist bemerkenswert, dass Probleme nicht immer eine „Verpackung" brauchen; um Interesse zu wecken, müssen sie nur so gewählt werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich wundern und neugierig werden." (Roth (2002))

Danksagung: Die Anregung zu diesem Artikel verdanke ich meinem Kollegen Hermann Baum.

Literatur

Engel, A. (1973): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ernst Klett, Stuttgart.

Lambacher-Schweizer (2003): Stochastik, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ernst Klett, Stuttgart.

Roth, N. (2002): Vorwärts – rückwärts – oder neu strukturieren? In: mathematik lehren 115, S. 14-17, Friedrich Verlag, Seelze.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2002): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3, Didaktik der Stochastik. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden.

Anschrift des Verfassers:
Dr. Henrik Kratz
Egenolffstr. 10
60316 Frankfurt
h.kratz@gmx.de

[4] Es gilt: $\lim_{n\to\infty} p_n = 1/e$. Diese faszinierende Verbindung von Stochastik und Analysis wird von Engel (1973) und Tietze et al. (2002) ausführlich dargestellt.