

Statistisches Denken bei Schülerinnen und Schülern

RANDALL E. GROTH, USA

Zusammenfassung: Das statistische Denken von 14- bis 19-Jährigen wird beschrieben.

Der Zusammenhang zu fundamentalen statistischen Konzepten wird dargestellt, um das Lehren zu verbessern.

0 Einleitung

Um ein guter Stochastiklehrer zu sein, braucht man ganz unterschiedliche Arten von Wissen. Fachwissen ist natürlich notwendig, aber nicht hinreichend. Lehrer brauchen auch Kenntnisse über Denkprozesse bei Schülern. Diese Kenntnisse zählen sich im Unterricht aus.

In diesem Artikel wird über die Untersuchung statistischen Denkens bei 15 Schülern berichtet, die zwischen 14 und 19 Jahre alt waren. Jeder Schüler wurde etwa zwei bis drei Stunden lang interviewt und musste dabei mehrere Aufgaben lösen.

1 Zum Gesetz der großen Zahlen

Eine brauchbare operative Fassung des Gesetzes der großen Zahlen lautet:

Gegeben sei eine Population mit dem endlichen Mittelwert μ . Man möchte μ schätzen und führt zu diesem Zweck n unabhängige Zufallsauswahlen durch und bildet dazu die arithmetischen Mittel \bar{x} . Dann gilt: Mit steigendem n nähern sich die arithmetischen Mittel \bar{x} dem Populationsmittelwert μ immer besser an.

Die intuitive Idee hinter dem Gesetz der großen Zahlen ist: Je mehr Daten man hat, um so sicherer kann man bezüglich der Schlussfolgerungen sein. Jakob Bernoulli, dessen Arbeit zum obigen Gesetz führte, fand, dass diese intuitive Idee offensichtlich sei. Er schrieb: „Zuweilen hat auch schon ein recht einfältiger Mensch in Folge irgend eines natürlichen Instinktes von sich aus und ohne jede vorangegangene Unterweisung die Erfahrung gemacht (was wirklich wunderbar ist) dass man, je mehr diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, um so weniger Gefahr läuft, von der Wahrheit abzuirren“ (Bernoulli, S. 248).

Bernoulli war nun zwar ein großer Mathematiker, aber vielleicht kein guter Lehrer. Daher wollen wir sehen, was die Schüler dazu meinen. Ihnen wurde die folgende Interview-Frage vorgelegt:

Lehrer A nimmt die Noten von 5 zufällig ausgewählten Schülern einer Region und bildet deren Durchschnitt.

Lehrer B nimmt die Noten von 15 zufällig ausgewählten Schülern der gleichen Region und berechnet den Durchschnitt.

- Glaubst du, dass es einen Unterschied in den beiden Durchschnitten geben wird? Warum oder warum nicht?
- Glaubst du, dass einer der beiden Lehrer eher einen Durchschnitt ermitteln wird, der mindestens 2 ist? (Die Schulnoten sollen von 1 bis 6 gehen.)

Frage b wurde gestellt, um herauszufinden, ob Schüler verstehen, dass eine kleine Stichprobe mit höherer Wahrscheinlichkeit eine größere Abweichung vom Populationsmittel liefert.

Es stellte sich heraus, dass entgegen der Behauptung von Bernoulli die intuitive Grundlage des Gesetzes der großen Zahlen doch nicht so offensichtlich war. Ein Schüler (nach einem Jahr Stochastikunterricht) meinte zu a., dass beide Mittel etwa gleich groß seien:

„Es handelt sich um eine einfache Zufallsgröße, daher hat jeder Schüler in der Region die gleiche Chance, gewählt zu werden. Die, die gewählt wurden, ergeben daher immer denselben Durchschnittswert.“

Zu b. meinte er, dass keiner der Lehrer eher einen Durchschnittswert von mindestens 2 erreiche:

„Zu wenige Schüler erreichen eine Note, die mindestens 2 ist. Die Durchschnittsnote ist nicht 2, sondern schlechter, da die meisten Schüler schlechter sind als 2.“

Dieser Schüler war in seinem unvollständigen intuitiven Verständnis kein Einzelfall. 6 von 15 Schülern hatten mit der Interviewfrage ähnliche Schwierigkeiten.

Man muss sicherstellen, dass alle Schüler ein richtiges intuitives Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen haben, weil es ein so grundlegendes Konzept ist. Computer-Software wie das Programm Sampling Sim (Garfield et al., frei verfügbar unter http://www.gen.umn.edu/research/stat_tools/) kann dazu nützlich sein; Schüler sollen die Ergebnisse von immer größer werdenden Stichproben vorhersagen und können so die Stichprobenmittel mit dem Populationsmittelwert vergleichen.

2 Lineare Transformationen von Daten

Es geht darum, ob Schüler den Effekt von linearen Transformationen auf die Gestalt der Verteilungskurve sowie auf Mittelwert und Streuung erkennen können. Dazu diente die folgende Interviewfrage:

Drei Klassen haben an einem Test teilgenommen, bei dem man bis zu 20 Punkten bekommen konnte. In Klasse B gab es 2 Schüler weniger als in A und B. Hier sind die Ergebnisse:

Klasse A	Klasse B	Klasse C
12	7	7
13	9	11
14	13	12
14	14	14
15	15	15
16	19	18
16	19	19
17	20	19
18		20
18		20

Stelle dir vor, der Lehrer gibt in Klasse A jedem Schüler gleichmäßig 15 Extrapunkte.

Wie ändern sich Durchschnitt und Streuung?

Auch hier gab es bei manchen Schwierigkeiten. Eine Schülerin konnte zwar sagen, dass die Addition von 15 Punkten zu einer gewissen Verschiebung des Mittelwerts führen würde, auf die entsprechende Frage nach der Streuung sagte sie aber:

„Die Frage nach der Streuung wäre einfacher zu beantworten, wenn die Abstände zwischen den Ergebnissen größer wären. So ist der Abstand immer höchstens 1. Aber wenn man 15 addiert, wären die Abstände größer.“

Auch hier stellte diese Schülerin keinen Einzelfall dar.

Auch hier kann Technologie helfen, bei den Schülern geeigneteren Grundvorstellungen aufzubauen.

3 Durchschnitte

Nun wurde untersucht, inwiefern Schüler Lagemaße wie arithmetisches Mittel, Median und Modalwert interpretieren und anwenden können. Deren numerische Werte können recht unterschiedlich sein. Dass Medien und Politiker ausnutzen, dass die Bevölkerung diese Unterschiede nicht kennt, und das für ihre Absichten günstigste Lagemaß verwenden, ist bekannt (Huff 1954).

Die Interviewfrage bezog sich auf jährliche Einkommen. Das größte mit 2.000.000 war ein Ausreißer. Der Median der Einkommen beträgt

42.500 und ist recht weit vom arithmetischen Mittel, das 140.650 beträgt, entfernt.

Jährliche Einkommen von 20 Personen:

16.000	56.000
80.000	5.000
25.000	54.000
24.000	53.000
37.000	45.000
110.000	38.000
46.000	2.000.000
26.000	64.000
28.000	40.000
14.000	52.000

Schüler bevorzugen intuitiv fast stets das arithmetische Mittel und lassen sich von der Tatsache, dass das höchste Einkommen sehr hoch über den übrigen liegt, kaum beeindrucken.

Ein Schüler meinte:

„Es gibt hohe und niedrige Einkommen. Der mit den zwei Millionen treibt den Mittelwert hoch. Dann gibt es noch den mit den 110.000. Das sind wirklich hohe Einkommen. Aber der Durchschnitt beträgt nur 140.000.“

Er gab diese Antwort, nachdem er zunächst versucht hatte, intuitiv einen typischen Mittelwert zu finden und dabei dem Median recht nahe gekommen war.

Schüler sollten daher ermutigt werden, ihren Intuitionen nicht völlig zu misstrauen, wenn sie den typischen Wert einer Datenreihe beschreiben sollen. Ihre Intuition sollte bei der Auswahl des geeigneten Lageparameters behilflich sein.

4 Zum Design von Experimenten

Wenn Schüler verstehen, wie man statistische Experimente plant, glauben sie nicht so leicht alle möglichen statistischen Behauptungen in Medizin oder Politik.

Um zu das Verständnis der Schüler zu beurteilen, gab es die folgende Interviewfrage:

Stelle dir vor, der Gouverneur von Florida beauftragt dich, folgende Fragen zu beantworten:

- Wie hoch ist das Durchschnittseinkommen in Florida?
- Werde ich bei der nächsten Wahl wiedergewählt?
- Wie viele Prozent der Bevölkerung können mit einem Computer umgehen?
- Ist der neue Impfstoff gegen das West Nile Virus wirklich erfolgreich?
- Wie erfolgreich ist das neue Gesetz, nach dem man erst man 18 Jahren den Führerschein bekommt (anstatt wie früher schon mit 16)?

Beschreibe, wie du bei jeder Frage vorgehen würdest.

Teil d. führt selbst direkt zu einem Plan, wie man ein statistisches Experiment durchführen sollte. Allerdings wurde den Schülern kein spezielles Design nahegelegt. Sie sollten frei entscheiden, wie sie vorgehen würden. Eine ausführliche Beschreibung der Denkmuster bei der Versuchsplanung findet sich in (Groth 2003 b).

Eine Schülerin wollte für Teil d. gar kein Experiment durchführen, sondern beschränkte sich auf schon existierende Studien:

„Wenn sich die Antworten nicht in einem Lehrbuch oder einer Zeitschrift befinden, muss man Leute befragen, die sich mit der Wirksamkeit des Impfstoffes beschäftigen, wenn man zu solchen Leuten überhaupt Zugang bekommt.“

Sie überließ also die Aufgabe d. anderen, die sie für besser qualifiziert hielt.

Andere Schüler schlugen zum Teil Verfahren vor, die nicht experimentell waren, wie z.B.:

„Ich würde Ärzte befragen und ihre Meinung einholen. Noch wichtiger wäre es, Leute zu befragen, die das Virus hatten und mit dem neuen Impfstoff geimpft wurden, um zu wissen, wie sie sich fühlten und ob es ihnen danach besser ging.“

Eine andere Antwort für d. war:

„Ich würde zum Krankenhaus gehen und fragen, wer alles geimpft worden ist. Dann würde ich deren Krankenakten einsehen und gucken, wie viele gesund wurden. Dann könnte man Durchschnitte bilden und sehen, wie häufig der Impfstoff wirksam war und ob das Impfen erfolgreich genug war. Vermutlich müsste man viele Leute fragen. Vielleicht müsste man verschiedene Altersgruppen extra untersuchen, vielleicht wirkt der Impfstoff für verschiedene Altersklassen unterschiedlich.“

Obwohl experimentelle Methoden als probates Mittel angesehen werden, um Ursache und Effekt zu unterscheiden, wollten mehrere Schüler ein solches Experiment gar nicht durchführen.

Es ist bei vielen Leuten nicht intuitiv klar, dass Experimente die Effektivität einer Behandlung zu beurteilen helfen. Deshalb sollte in Lehrbüchern nicht nur beschrieben werden, wie man experimentelle Tests durchführt, sondern auch, unter welchen Umständen solche Tests sinnvoll sind.

5 Schluss

Unsere Gesellschaft wird mehr und mehr abhängig von Statistik und den Ergebnissen statistischer Untersuchungen. Daher müssen sich die Lehrer um die Qualität statistischen Denkens bei Schü-

lern kümmern. Sie müssen das statistische Denken ihrer Schüler kennen und verstehen, um es verbessern und weiterentwickeln zu können.

Literatur

Bernoulli, Jakob (Nachdruck 1999 der Ausgabe von 1713): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Thun; Frankfurt am Main: Harri Deutsch

Garfield, J., Chance, B. and del Mas, B. (2001): Tools for Teaching and Assessing Statistical Inference. Available at http://www.gen.umn.edu/research/stat_tools/

Groth, R.E. (2003a): Development of a High School Statistical Thinking Framework. Doctoral dissertation, Illinois State University, 2003. Dissertation Abstracts International **64** (04), 1202.

Groth, R.E. (2003b): High school students' levels of thinking in regard to statistical study design. Mathematics Education Research Journal **3**, 252–69.

Huff, D. (1954): How to Lie with Statistics. New York: W.W. Norton.

Konold, C., Well, A., Lohmeier, J. and Pollatsek, A. (1993). Understanding the law of large numbers. In: J.R. Becker and B.J. Pence (eds), Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Volume 2, pp. 299–305. Pacific Grove, CA.

Bei der Übersetzung hat der Heftherausgeber die Originalquelle gekürzt und bearbeitet.

Originalquelle:

Randall E. Groth:

An Exploration of Students' Statistical Thinking

Teaching Statistics. Vol 28 (1), Spring 2006, 17 – 21.

Anschrift des Verfassers:

Randall E. Groth

Salisbury University, USA.

e-mail: regroth@salisbury.edu