# Prozent von Prozent oder: Warum Prozentzahlen in Vierfeldertafeln missverstanden werden können

RENATE MOTZER, AUGSBURG

***Zusammenfassung:*** *Vierfeldertafeln sind gute Hilfsmittel, um 2-dimensionale Daten darzustellen. Allerdings ist es nicht unproblematisch, Vierfeldertafeln mit Prozentangaben zu füllen. Dieser Artikel soll den Leser zum Nachdenken darüber anregen, ob man sich bei Vierfeldertafeln nicht auf absolute Häufigkeiten beschränken sollte.*

## 1 Eine Beispielaufgabe

Bei Prozentangaben ist es immer wichtig zu wissen, auf welchen Grundwert sie sich beziehen. Ein Prozentwert, dessen Grundwert selbst ein Prozentwert ist, wird häufig missverstanden bzw. falsch interpretiert. Auch wenn mit Vierfeldertafeln gearbeitet wird, bei denen der Grundwert immer die Gesamtmenge darstellt, kann es leicht zu Verwechslungen in der Sprechweise kommen. Vielleicht wäre es besser, Vierfeldertafeln nur mit absoluten Häufigkeiten (natürlichen Häufigkeiten) zu füllen (vgl. Krauss 2003). Selbst wenn die absoluten Häufigkeiten nicht bekannt sind, ist es oft anschaulicher, natürliche Häufigkeiten anzunehmen (30% heißt 30 von 100 oder 300 von 1000 o.ä.).

Ein Beispiel: 100 Kinder werden befragt.

| | Mädchen | Jungen | Insgesamt |
|---|---|---|---|
| mag Fußball | 30 | 30 | 60 |
| mag Fußball nicht | 30 | 10 | 40 |
| Insgesamt | 60 | 40 | 100 |

Mit relativen Häufigkeiten (in Prozent angegeben):

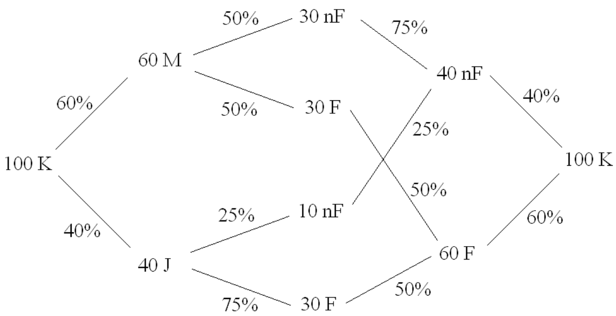
| | Mädchen | Jungen | Insgesamt |
|---|---|---|---|
| mag Fußball | 30 % | 30 % | 60 % |
| mag Fußball nicht | 30 % | 10 % | 40 % |
| Insgesamt | 60 % | 40 % | 100 % |

Richtig ist die Aussage: „Von den Mädchen, das sind 60 der Befragten, mögen 30 Fußball.“
Falsch ist die analoge Aussage: „Von den Mädchen, die 60 % der Befragten ausmachen, mögen 30 % Fußball.“
Richtig wäre: „Von den Mädchen, die 60% der Befragten ausmachen, mögen 50% Fußball.“

Aber wenn irgendwo steht: „In der befragten Gruppe waren 60% Mädchen. Davon mögen 50% Fußball.“, würden die meisten Schülerinnen und Schüler in die Vierfeldertafel links oben 50% eintragen und nicht 30%.

Wenn wir es statt mit Prozenten durch Bruchteile formulieren, werden wir das Problem nicht los: In der befragten Gruppe waren 3/5 Mädchen, die Hälfte davon mag Fußball.
Mag sein, dass speziell „die Hälfte“ hier noch richtig gedeutet wird. Aber würde es heißen: „2/5 davon mögen Fußball“, würden sicher auch sehr viele ins obere Feld 2/5 schreiben.

Dass die bedingten relativen Häufigkeiten in der Vierfeldertafel keinen Platz haben, ist ein Grund, warum ich in solchen Situationen ein Baumdiagramm vorziehen würde. Auch hier kann man die absoluten Häufigkeiten genauso nutzen wie die relativen. Mit absoluten Häufigkeiten sieht es im beschriebenen Beispiel so aus (K Kinder, M Mädchen, J Jungen):




Aus den Umfrageergebnissen wurden alle bedingten relativen Häufigkeiten berechnet. Jetzt kann man sehen: Die 30 Mädchen, die Fußball nicht mögen, sind 30 von 100 befragten Kindern (30% aller befragten Kinder), es sind 50% der Mädchen und 75% derer, die Fußball nicht mögen.
Dass in der Vierfeldertafel nur 30% steht, ist also nicht die ganze Wahrheit und kann leicht fehlgedeutet werden. All die bedingten Häufigkeiten stehen nicht in einer Vierfeldertafel, was diese vielleicht übersichtlicher erscheinen lassen mag. Auch im Baumdiagramm kann man darauf verzichten, diese Prozentwerte einzutragen. Stellt man dann aber etwa eine Frage wie: „Wie viel Prozent der Mädchen mögen Fußball nicht?“, so kann leicht auf die Verzweigung gezeigt werden, an der das Ergebnis einzutragen ist. In der Vierfeldertafel hat dieses Ergebnis keinen Platz.

## 2 EIN SCHULBUCHVERGLEICH

In Schulbüchern werden Vierfeldertafeln unterschiedlich verwendet. Beispielhaft seien die bayerischen Schulbücher zum neuen G8 (das Gymnasium in 8 Schuljahren) verglichen. Dort finden sich Vierfeldertafeln zum ersten Mal in der 6. Klasse.

In „Mathematik anschaulich“ werden nur die 4 Felder angegeben ohne Felder für die Summen in Zeilen und Spalten. Dabei werden absolute und relative Häufigkeiten verwendet (in Bruchteilen und als Prozentangaben). Alle anderen Bücher lassen auch Platz für die Summen.

In „Mathematik“ werden nur absolute Häufigkeiten eingetragen. Zum Teil sind diese aus angegebenen Prozentsätzen und der Gesamtmenge zu errechnen.

Die anderen Bücher („delta“, „Fokus Mathematik“ und „Lambacher Schweizer“) verwenden absolute Häufigkeiten und Prozentzahlen. Vierfeldertafeln mit absoluten Häufigkeiten sind in allen Büchern öfter vertreten.

Allerdings ist zu beachten, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten (und überhaupt Prozent von Prozent) in der 6. Klasse noch kein Lehrplanthema sind. Daher dürften Missverständnisse, wie sie in Abschnitt 1 diskutiert wurden, an und für sich im Unterricht keine Rolle spielen.

Man sollte aber beim Lesen von Vierfeldertafeln darauf achten, dass die Zahlen richtig interpretiert werden (beim Beispiel aus Abschnitt 1: „30% der Kinder sind Mädchen, die Fußball mögen.“ Falsch wäre jedoch: „30% der Mädchen mögen Fußball“ oder „30% der Fußballfans sind Mädchen“).

Prozent von Prozent spielen dann ab der 7. Klasse eine Rolle. Nur „delta“ und „Fokus“ bringen dort auch Aufgaben mit Vierfeldertafeln. In „delta“ werden meist nur absolute Häufigkeiten eingetragen. Die beiden Aufgaben, die relative Häufigkeiten verwenden, berühren das Gebiet „Prozent von Prozent“ nicht. Im „Fokus“ gibt es eine etwas anspruchsvollere Aufgabe (Seite 78, Nr.7). Sie lautet:

> **Vierfeldertafel** Am Beethoven-Gymnasium beträgt der Anteil der Mädchen 45%. 28% der Mädchen und 36% der Jungen kommen gewöhnlich mit dem Rad zur Schule. Welcher Prozentsatz aller Schüler nimmt für den Schulweg das Rad?

Hier ist die Gesamtzahl der Schüler und Schülerinnen nicht bekannt. Verwendet man zur Lösung, wie es das Buch vorschlägt, eine Vierfeldertafel, so sind nicht die 28% und die 36% einzutragen, sondern 28% von 45% und 36% von 55%.

Man könnte die Aufgabe aber auch so bearbeiten: „Nehmen wir mal an, die Schule hat 1000 Schüler und Schülerinnen.“ Dann könnte eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten erstellt werden. Freilich sollte schließlich diskutiert werden, warum diese Annahme die Lösung nicht beeinträchtigt. Dazu kann man vergleichen, wie sich die Rechnung ändert, wenn man annimmt, es seien nur 500 Schülerinnen und Schüler, nur 100 usw.

Baumdiagramme werden in der 5. Klasse für kombinatorische Aufgaben verwendet, kommen aber in den Klassen 6 bis 8 nicht mehr vor. Sie stehen hier als Lösungsalternative also nicht zur Verfügung.

Auch im Schulbuch für die 8. Klasse arbeitet Fokus mit Vierfeldertafeln, in denen nur Prozentangaben stehen, während bei „delta“ gegebenenfalls beide gegenübergestellt werden, aber nie nur Prozentangaben gegeben sind.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sollen nach dem bayrischen G8-Lehrplan in der 10. Klasse behandelt werden. Dafür gibt es noch keine Schulbücher.

In anderen Schulbüchern (andere Bundesländer, Oberstufe in Bayern) wird bedingte Wahrscheinlichkeit meist im Zusammenhang mit Baumdiagrammen erläutert. Bei der Unabhängigkeit von Ereignissen finden sich manchmal zwei Vierfeldertafeln gegenübergestellt: Einmal sind die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten $p(A \cap B)$ usw. eingetragen, einmal die berechneten $p(A) \cdot p(B)$ usw. Sind diese jeweils gleich, so sind A und B stochastisch unabhängig.

Will man aber statistisch ermittelte Daten auf Unabhängigkeit prüfen, ist eine exakte Gleichheit solcher Werte kaum zu erwarten. Ob eine ungefähre Gleichheit besteht, wird meist mit dem $\chi^2$-Quadrat getestet.

Strick 1999, der in seinem Artikel Vierfeldertafeln mit absoluten Häufigkeiten und relativen Häufigkeiten verwendet, geht beim $\chi^2$-Quadrat- Test von Prozentzahlen aus und zieht den Faktor n (Gesamtmenge der Untersuchten) in der Formel nach vorne.

Man könnte solche Aufgaben aber auch anders bearbeiten: Da die absoluten Häufigkeiten durchaus eine Rolle spielen, rechnet man sich für die zweite Vierfeldertafel die bei Unabhängigkeit zu erwartenden Häufigkeiten aus und vergleicht diese nun mit den tatsächlich aufgetretenen.

Als Beispiel sei hier die Internetseite des Instituts für Medizinische Statistik der Uni Wien genannt. In Aufgabe 5.4. heißt es dort:

> In einem Betrieb mit 160 Beschäftigten wurden 93 zufällig ausgewählte Personen mit Vitamin C prophylaktisch gegen Erkältungskrankheiten behandelt. Von diesen 93 erkrankten 25, von den unbehandelten 33. War die Prophylaxe erfolgreich?

Dazu werden 2 Vierfeldertafeln verglichen („C ja" heißt: „Vitamin C genommen"; „k ja" heißt: „krank"):

beobachtet:

| | C ja | C nein | |
|---|---|---|---|
| k ja | 25 | 33 | 58 |
| k nein | 68 | 34 | 102 |
| | 93 | 67 | 160 |

erwartet:

| | C ja | C nein | |
|---|---|---|---|
| k ja | 33,71 | 24,29 | 58 |
| k nein | 59,29 | 42,71 | 102 |
| | 93 | 67 | 160 |

Aus dem $\chi^2$-Quadrat Wert 8,43, welcher größer als der kritische Wert (3,84) ist, wird geschlossen, dass es „einen Zusammenhang zw. Auftreten der Erkältungskrankheit und Vitamin C" gibt.

Vierfeldertafeln, die Ergebnisse medizinischer Tests angeben, findet man in medizinischen Artikeln gewöhnlich mit absoluten Häufigkeiten (auch im Internet können einige gefunden werden). Die Anzahl der Testpersonen ist schließlich nicht unwichtig, um die Resultate beurteilen zu können.

## 3 EIGENE UNTERRICHTSERFAHRUNGEN

Persönliche Erfahrungen zu dieser Thematik habe ich im Unterricht mit folgender Aufgabe gemacht (zur Aufgabenstellung vgl. Strick 1999):

> **Fahrstuhleffekt im Schulsystem**
> **Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder**
>
> 37% aller 10- bis 26-jährigen besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schüler, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8%, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.

(Nach einem Artikel der FAZ vor etwa 15 Jahren)

Berechnen Sie die Daten, die man für folgende Version des Artikels bräuchte:

> **Schulform Gymnasium immer beliebter**
> **Viele Eltern bevorzugen aber bekannte Schulform**
>
> ___ % der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schicken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium; bei den Eltern, die eine Haupt- oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: ___ % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. Der Anteil der Gymnasiasten ist allerdings in einer Generation von ___ % auf ___ % gestiegen.

Ich habe diese Aufgabe in einer Probearbeit gestellt, nachdem im Unterricht analoge Aufgaben zum AIDS-Test besprochen wurden. Bei der AIDS-Test-Aufgabe war nun die bedingte Wahrscheinlichkeit deutlich höher als p(A). (0,1 % der Getesteten haben das Virus in sich, bei 99% davon zeigt der Test dies auch an).
Hier jedoch handelt es sich um 35% und 37%: Die Tatsache, dass 35 kleiner als 37 ist, hat viele Schüler und Schülerinnen dazu verleitet, 35% direkt in die Vierfeldertafel einzutragen. Auch einer derjenigen, die die Aufgabe mit einem Baumdiagramm gelöst haben, hat die 35% an der falschen Stelle, also an das Ende der Verzweigung, eingetragen. Die meisten, die mit dem Baumdiagramm gearbeitet haben, haben dort jedoch die richtige Stelle gefunden.

Die Forderung genau zu lesen gilt sicherlich immer, auch wenn man in Vierfeldertafeln nur absolute Häufigkeiten schreiben würde und den Schülerinnen und Schülern vielleicht vorschlägt, hier insgesamt von 100/ 1000/ 10000 … Jugendlichen auszugehen. Wenn die Schülerinnen und Schüler die in der Aufgabe gegebenen Prozentzahlen in absolute Häufigkeiten umrechnen müssen, rechnen vielleicht doch mehr Schülerinnen und Schüler sie richtig um, als wenn es die Alternative gibt, die Prozentzahlen direkt in eines der vier Felder einfach nur hinein zu schreiben.

Als ich in späteren Jahrgängen ähnliche Aufgaben mit natürlichen Häufigkeiten rechnen ließ, traten jedenfalls deutlich weniger Fehler auf.

## Literatur


Krauss, S.: Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das 'Haeufigkeitskonzept'. Stochastik in der Schule. (2003) v. 23(1) p. 2-9.

Strick, H. K., Vierfeldertafeln im Stochastikunterricht der Sekundarstufen I und II, in: Praxis der Mathematik 1/41, 1999, S. 49 – 58

http://www.meduniwien.ac.at/medstat/lecture/ssm2/beispiele/ssm2%20-%20chi%20quadrat%20bsp.pdf#search=%22Vierfeldertafel%20chi-Quadrat%22

zuletzt besucht am 19. 9. 2006

**Schulbücher:**

delta 6 (7/8), Mathematik für Gymnasien, Bamberg: C.C. Buchners Verlag

Fokus Mathematik 6 (7/8), Ausgabe Gymnasium Bayern, Berlin: Cornelson Verlag

Lambacher Schweizer 6 (7/8), Ausgabe Bayern, Stuttgart: Ernst Klett Verlag

Mathematik 6, München: Bayerischer Schulbuchverlag

Mathematik anschaulich 6 (7), München: Oldenbourg Schulbuchverlag



**Anschrift der Verfasserin:**
Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
86135 Augsburg
Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de


## Bericht zur Herbsttagung des Ak Stochastik (10.- 12. 11. 2006 in Soest)

Die diesjährige Herbsttagung wurde wieder von Jörg Meyer organisiert und geleitet.
Sie hatte das Thema „Schulbuchkonzepte“.

Mit 36 Teilnehmern gab es die folgenden Vorträge:

- Bernd Neubert, Uni Giessen / PH Heidelberg
  Leitidee „Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit“ in Schulbüchern für den Primarbereich
- Wolfgang Riemer, Köln
  Überblickswissen SII vermitteln, Grund- und Leistungskurse unterrichten: Ob und wie das mit einem einzigen Schulbuch gut gehen kannn?
- Heinz Klaus Strick, Leverkusen
  Stochastik kompakt
- Thorsten Meyfarth, Universität Kassel
  Ein Kurskonzept zum kontinuierlichen Einsatz von Computersimulationen und Lernumgebungen im Stochastik-Leistungskurs
- Raphael Diepgen, Ruhr-Universität Bochum
  Erfahrungsbericht eines ehemaligen Schulbuchautors
- Carel van de Giessen, Niederlande
  Math textbooks in the Netherlands. Concept and content
- Laura Martignon / Elke Kurz-Milcke, Ludwigsburg
  Die faszinierenden Bücher von Arthur Engel und die berühmte Holzschachtel mit seinen spielerischen Materialien