Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

22. Oktober 2014
Abgabe am 29.10.2014 in der Übung

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 1

Aufgabe 1

Die Kategorie **Rel** der Relationen ist wie folgt definiert: Objekte sind Mengen und ein Morphismus $A \to B$ ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Die Komposition ist definiert durch

$$S \circ R = \{\langle x, c\rangle \mid \text{Es existiert ein } b \text{ mit } \langle a, b\rangle \in R \text{ und } \langle b, c\rangle \in S\}.$$

Zeige, dass diese Kategorie konkret ist.

Aufgabe 2

(a) Betrachte die Kategorie der Monoide **Mon**. Zeige, dass für jede Menge $X \in \mathbf{Set}$ ein Monoid $F \in \mathbf{Mon}$ existiert, der frei über X ist.

(b) Zeige, dass für einen Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ $(A, B \in \mathbf{Set})$ gilt:
  (i) f mono $\iff$ f injektiv
  (ii) f epi $\iff$ f surjektiv.

Definition 1
Ein Unterobjekt *eines Objektes C einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Äquivalenzklasse von Monomorphismen. Zwei Monomorphismen $f : B \to C$, $f' : B' \to C$ sind äquivalent, wenn es Morphismen φ, ψ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, shift left, "\varphi"] & \\
& C \\
B' \arrow[ur, "f'"'] \arrow[uu, shift left, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Definition 2
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt. Der Kern *eines Morphismus $f : B \to C$ ist ein Morphismus $i : K \to B$ mit $K \in \mathcal{C}$, so dass $f \circ i = 0$ und folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:*
Jeder Morphismus $e : T \to B$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ e = 0$ faktorisiert über K als $e = i \circ e'$ für ein eindeutig bestimmtes $e' : A \to K$:

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, dotted, "e'"'] \arrow[d, "e"] \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3

Zeige, dass folgende Eigenschaften für den Kern eines Morphismus $f : B \to C$ gelten:

(i) Der Kern ist mono.

(ii) Der Kern kann als Unterobjekt von B aufgefasst werden.

(iii) Ist f mono, so gilt $\ker f = 0$.

(iv) In $\mathbf{Mod}_R$ ist K isomorph zum üblichen Kern.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Sei $I = \{0, a, b\}$ mit $0 < a$ und $0 < b$ gegeben. Weiterhin sei $C_i \in \mathcal{C}$ für alle $i \in I$ und $L = \lim_{i \in I} C_i$ und folgender *Pullback* gegeben:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda^a"] \arrow[d, "\lambda^b"'] \arrow[dr, "\lambda^0"] & C_a \arrow[d, "f_a^0"] \\ C_b \arrow[r, "f_b^0"'] & C_0 \end{tikzcd} .$$

Zeige, dass aus f_b^0 mono λ_a mono folgt.

(b) Zeige, dass $f : A \to B$ $(A, B \in \mathcal{C})$ genau dann epi ist, wenn folgendes Diagramm ein *Pushout* ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$