Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

14. Januar 2015

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 10

Aufgabe 1

Sei X ein Schema und $A = \mathcal{O}_X(X)$ der Ring der globalen Schnitte. Zeige, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

a) X ist affin.

b) Es existieren endliche viele Elemente $f_1, \ldots, f_n \in A$ mit $A = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, so dass X_{f_i} affin für alle $i \in \{1, \ldots n\}$ ist und $X = \bigcup_{i=1}^n X_{f_i}$ gilt.

Hinweis: Um die Rückrichtung zu beweisen tensoriere mit A_g, wobei $g \in \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$

Aufgabe 2

Zeige, dass die Eigenschaft *(lokal) von endlichem Typ* stabil unter Basiswechsel ist.

Bemerkung 1
Sei A ein Ring, B eine graduierte A-Algebra und C eine A-Algebra. Dann können wir $E = B \otimes_A C$ auf kanonische Art und Weise als graduierte C-Algebra betrachten. Denn aus $B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$ folgt $E = \bigoplus_{d \geq 0} (B_d \otimes_A C)$. Somit können wir $E_d = B_d \otimes_A C$ setzen, was E zu einer graduierten C-Algebra macht. E ist zusätzlich auch noch eine graduierte A-Algebra.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, B eine graduierte A-Algebra und C eine A-Algebra. Weiterhin sei $B \otimes_A C$ mit der Graduierung aus der vorhergenden Bemerkung vesehen. Zeige, dass folgender kanonischer Isomorphismus existiert:

$$\mathrm{Proj}(B \otimes_A C) \cong \mathrm{Proj}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C).$$