Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

21. Januar 2015

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 11

Aufgabe 1

Zeige folgende Aussagen:

a) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Schemamorphismen, so gilt für $f(x) = y$ und $g(y) = z$:
$$T_x(g \circ f) = (T_y g \otimes_{\kappa(x)} \mathrm{id}_{\kappa(x)}) \circ T_x f.$$

b) Ist A ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, so vermittelt die kanonische Abbildung $A \to A_\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus
$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 A_\mathfrak{m}.$$

Definition 1
Für Modulgarben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über X können wir das Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{B}$ *definieren durch die Garbifizierung der Prägarbe die durch $(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{B})(\mathcal{U}) = \mathcal{A}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}(\mathcal{U})} \mathcal{B}(\mathcal{U})$ induziert wird. $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{B}$ ist wiederum ein $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Wiederholung 1
Seien X, Y zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig.

a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Die durch $V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ für offene $V \subseteq X$ definierte Prägarbe auf Y ist eine Garbe, die direkte Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$

b) Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Die zu der durch $U \mapsto \mathrm{colim}_{f(U)\subseteq V}\, \mathcal{G}(\mathcal{V})$ für offene $U \subseteq X$ definierte Prägarbe auf X assozierte Garbe heißt inverse Bildgarbe $f^{-1}\mathcal{G}$

Definition 2
Seien X, Y zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. und $\mathcal{G}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Dann ist $f^{-1}\mathcal{G}$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul. Weiterhin existiert ein Garbenmorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ auf X. Wir definieren $f^*\mathcal{G}$, die inverse Bildgarbe *von $\mathcal{G}$* bzgl. *f, durch das Tensorprodukt*
$$f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$
$f^*\mathcal{G}$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Aufgabe 2

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, sei $\mathcal{A}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom endlichen Rang. Wir definieren die zu $\mathcal{A}$ duale Modulgarbe $\mathcal{A}^* = \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$. Zeige:

a) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.

b) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{B}$ ist $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \mathcal{A}^* \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{B}$.

c) Für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{B}, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$.

d) Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{B}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Rang, dann existiert ein natürlicher Isomorphismus $f_*(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{B}) \cong f_*\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{B}$ (Hinweis: Es gilt $f^{-1}\mathcal{O}_Y^n \cong (f^{-1}\mathcal{O}_Y)^n$).

Aufgabe 3

Sei R ein DVR-Ring mit Quotientenkörper K und sei $X = \mathrm{Spec}(R)$. Zeige, dass ein $\mathcal{O}_X$-Modul eindeutig durch einen R-Modul M, einem K-Vektorraum L und einen Vektorraum-Homomorphismus $\varphi : M \otimes_R K \to L$ definiert ist.

Aufgabe 4

Sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Gib einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{A}$ an, so dass $f_*\mathcal{A}$ kein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.