Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

27. Januar 2015

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 12

Aufgabe 1

Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S)}) \to (Y, \mathcal{O}_Y) = (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)})$ ein affiner Schemamorphismus, der durch einen Homomorphismus $\varphi : R \to S$ induziert wurde.

a) Sei $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul induziert durch einen S-Modul M. Via φ kann man M auch als R-Modul betrachten, welchen wir mit M_φ bezeichnen werden. Zeige, dass die direkte Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$ isomorph zu dem $\mathcal{O}_Y$-Modul $\widetilde{M_\varphi}$ ist.

b) Sei N ein R-Modul und $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ ein $\mathcal{O}_Y$ Modul. Zeige, dass dann $f^*\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist, der durch den S-Modul $N \otimes_R S$ erzeugt wird.

Aufgabe 2

Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{A}$-Moduln über Garbe kommutativer Ringe. Seien zwei der $\mathcal{A}$-Moduln kohärent. Zeige, dass dann auch der dritte kohärent sein muss (Korollar 8.16 darf nicht verwendet werden).

Aufgabe 3

a) Seien X ein Schema mit einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Weiterhin ist $\mathcal{F}(U_i)$ kohärent als $\mathcal{O}_{U_i}$-Modul für jedes $i \in I$. Zeige, dass dann $\mathcal{F}$ kohärent als $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

b) Seien $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schemamorphismus und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeige, dass ein kanonischer $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\varphi : f^*f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ existiert.

c) Seien $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schemamorphismus, $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln und $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Zeige, dass dann folgende Sequenzen exakt sind:

$$0 \to f_*\mathcal{F}_1 \to f_*\mathcal{F}_2 \to f_*\mathcal{F}_3$$

und

$$f^*\mathcal{G}_1 \to f^*\mathcal{G}_2 \to f^*\mathcal{G}_3 \to 0.$$