Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

4. Februar 2015

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 13

Aufgabe 1

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ heißt *invertierbar*, wenn er ein lokal freier Modul vom Rang 1 ist. Seien nun $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ invertierbare Moduln. Zeige:

a) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ ist invertierbar.

b) $\mathcal{M}^*$ ist invertierbar.

c) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^* \cong \mathcal{O}_X$.

Aufgabe 2

Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei Schemata. Die Menge der Isomorphieklassen invertierbare $\mathcal{O}_X$-Moduln trägt eine Gruppenstruktur bezüglich $\otimes_{\mathcal{O}_X}$. Sie wird als *Picardgruppe von* X ($\mathrm{Pic}(X)$) bezeichnet.

a) Weise nach, dass $\mathrm{Pic}(X)$ eine Gruppe ist.

Zeige folgende Aussagen für einen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata.

b) Für jeden invertierbaren $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{M}$ ist $f^*\mathcal{M}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_Y$-Modul.

c) f induziert einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$.

Aufgabe 3

a) Seien $\varphi : C \to B$ und $\psi : B \to A$ Ringhomomorphismen. Zeige, dass dann die folgende exakte Sequenz von A-Moduln existiert:

$$A \otimes_B \Omega_{B/C} \to \Omega_{A/C} \to \Omega_{A/B} \to 0.$$

b) Sei B eine C-Algebra, I ein Ideal von B und $A = B/I$. Zeige, dass dann die folgende exakte Sequenz von A-Moduln existiert:

$$I/I^2 \xrightarrow{\alpha} A \otimes_B \Omega_{B/C} \xrightarrow{\beta} \Omega_{A/C} \longrightarrow 0$$

mit $\alpha(\bar{i}) = 1 \otimes di$ und $\beta(a \otimes db) = a \cdot d\bar{b}$.