Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

28. Oktober 2014
Abgabe am 05.11.2014 in der Übung

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 2

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{Vec}_K$ die Kategorie der K-Vektorräume. Sei nun der kontravariante Funktor $D : \mathbf{Vec}_K \to \mathbf{Vec}_K$ wie folgt definiert:

- $D(V) = V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ (der Dualraum von V) für ein $V \in \mathbf{Vec}_K$,
- $D(f) : W^* \to V^*$, $\lambda \mapsto \lambda \circ f$, für $f : V \to W$ (die duale Abbildung zu f)

Zeige, dass ein $\tau : 1_{\mathbf{Vec}_K} \to DD$ existiert, welches eine natürliche Transformation mit folgenden Eigenschaften bildet:

- τ_V ist injektiv für alle $V \in \mathbf{Vec}_K$.
- Wird nur die Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume betrachtet so bildet τ den natürlichen Isomorphismus zwischen DD und $1_{\mathbf{Vec}_K}$.

Aufgabe 2

(i) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X. Zeige, dass zwei Morphismen

$$\varphi, \psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

genau dann übereinstimmen, wenn die induzierte Abbildungen auf den Halmen φ_x, ψ_x für alle $x \in X$ übereinstimmen.

(ii) Zeige, dass in jeder Garbe von Ringen Halme existieren und dass die Halme selbst wieder Ringe bilden.

Aufgabe 3

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei Garben von abelschen Gruppen auf X. Für eine offene Menge $U \subseteq X$ sei $\mathcal{F}_U$ die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf U, d.h.

$$\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(V)$$

für alle offenen $V \subseteq U$. Weiter sei $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$ die Menge der Garbenmorphismen $\Phi : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U$. Zeige, dass die Zuordnung

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$$

eine Garbe von abelschen Gruppen auf X ist. Sie heißt die *Hom-Garbe* und wird mit $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnet.

Aufgabe 4

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und $A \in \mathbf{Ab}$ eine abelsche Gruppe. Man definiere nun für offene Mengen $U \subseteq X$

$$\mathcal{F}(U) := \begin{cases} A & \text{falls } x \in U \\ E & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter sei $V \subseteq U$ eine offene Menge. Falls $x \in V$ gilt, setze $\rho_V^U := \mathrm{id}_A$.

(i) Zeige, dass $\mathcal{F}$ eine Garbe ist.

(ii) Berechne den Halm von $\mathcal{F}$ für jeden Punkt von X.

(iii) Sei $\mathcal{G}$ eine beliebige Garbe. Gib eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_x, \mathcal{F}_x)$$

an.

Die Garbe $\mathcal{F}$ nennt man *Wolkenkratzer-Garbe* (engl.: *Skyscraper sheaf*).