Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

5. November 2014

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 1

a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe und $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eine Teilgarbe. Zeige, dass

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}' \to 0$$

eine exakte Sequenz ist.

b) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz. Zeige, dass eine Teilgarbe $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ existiert mit $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}'$ und $\mathcal{H} \cong \mathcal{G}/\mathcal{G}'$.

Aufgabe 2

Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus auf einem topologischen Raum X.

a) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) φ injektiv.
   (ii) $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist injektiv für alle $x \in X$.
   (iii) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist injektiv für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$.

b) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) φ surjektiv.
   (ii) $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist surjektiv für alle $x \in X$.
   (iii) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ und für jedes $g \in \mathcal{G}(U)$ existiert eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von U und Elemente $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass gilt:

$$\varphi_U(f_i) g_{|U_i} \quad \forall\, i$$

Definition 1
Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt welk, *wenn die Restriktionsabbildung $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U$ surjektiv sind.*

Aufgabe 3

Sei $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass die Sequenz $0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \to 0$ exakt ist, wenn $\mathcal{F}$ welk ist.

Definition 2

Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene Menge und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U. Bezeichnet $j : U \to X$ die kanonische Inklusion, so ist $j_!\mathcal{F}$ die zu folgender Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \textit{falls } V \supseteq U \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe.

Aufgabe 4

Sei $X = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $Z = \{0,1\}$. Weiterhin sei $\mathbb{Z}_U = j_!(\mathbb{Z}_{|U})$ mit $j : U \hookrightarrow X$ und $\mathbb{Z}_Z = i_*(\mathbb{Z}_{|Z})$ mit $i : Z \hookrightarrow X$, wobei $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe auf X sei (vgl. Beispiel 2.5 (iii), beachte aber, dass X zusammenhängend ist). Zeige folgende Aussagen:

1. Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Z \to 0$ ist exakt.
2. Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_U(X) \to \mathbb{Z}(X) \to \mathbb{Z}_Z(X) \to 0$ ist nicht exakt.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Sei $\mathcal{H} \subseteq \ker f$ eine Teilgarbe von $\mathcal{F}$. Zeige, dass ein eindeutig bestimmter Morphismus $\overline{f}$ von Garben existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{G} \\ & \mathcal{F}/\mathcal{H} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige, dass $\overline{f}$ genau dann injektiv ist, wenn $\mathcal{H} = \ker f$ gilt und $\overline{f}$ ist genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.