Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

18. November 2014

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 5

Aufgabe 1

a) Gib die Strukturgarben von $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ und $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$ an.

b) Gib alle Morphismen $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ von geringten Räumen an.

Aufgabe 2

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ ein Schema ist. Dieses Schema wird als die auf U *induzierte Schema-Struktur* bezeichnet und als *offenes Unterschema* von X aufgefasst.

Definition 1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Für jedes $x \in X$ sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring in x mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x$. Dann ist

$$\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

der Restklassenkörper *von x auf X.*

Aufgabe 3

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und K ein Körper. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Es existiert ein Morphismus von Schemata: $\operatorname{Spec}(K) \to X$.

b) Für ein $x \in X$ existiert eine Inklusionsabbildung $\kappa(x) \to K$.

Aufgabe 4

Sei $R = \mathbb{C}[x, y]$. Bestimme $\mathcal{O}(U)$ für $U = \operatorname{Spec}(R) \setminus \{\langle x, y\rangle\}$.