Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

26. November 2014

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 6

Aufgabe 1

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Weiter sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring in x mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x$. Wir definieren folgende Menge:

$$X_f = \{x \in X \mid f_x = [(f, X)] \notin \mathfrak{m}_x\}$$

a) Sei $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein offenes Unterschema von $(X, \mathcal{O}_X)$ mit $(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_B)$ für einen Ring B. Nach Korollar 3.21 ist $\mathcal{O}_B(\mathrm{Spec}(B)) \cong B$, so dass o.B.d.A. $B = \mathcal{O}_X(U)$. Weiter sei $\overline{f} := \rho_U^X(f) \in B$ gegeben. Zeige, dass $U \cap X_f = D(\overline{f})$ gilt und folgere, dass X_f eine offene Teilmenge von X ist.

b) Sei X nun kompakt. Weiter sei $a \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $\rho_{X_f}^X(a) = 0$. Zeige, dass ein $n > 0$ existiert mit $f^n a = 0$. (Hinweis: Benutze eine offene affine Überdeckung von X.)

c) Sei $\{U_i\}$ eine endliche offene affine Überdeckung von X, so dass für alle i, j die Schnitte $U_i \cap U_j$ kompakt sind. Zeige, dass für jedes $b \in \mathcal{O}_X(X_f)$ ein $n > 0$ existiert, so dass $f^n b = \rho_{X_f}^X(\overline{a})$ für ein $\overline{a} \in \mathcal{O}_X(X)$.

d) Schließe unter den Annahmen von c), dass $\mathcal{O}_X(X_f) \cong (\mathcal{O}_X(X))_f$.

Aufgabe 2

Es seien $B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$ und $C = \bigoplus_{d \geq 0} C_d$ graduierte Ringe und $\varphi : B \to C$ ein graduierter Homomorphismus, d.h. es gibt ein $r \geq 1$ mit $\varphi(B_d) \subset C_{rd}$ für alle $d \geq 0$. Es sei I das homogene Ideal $I = \langle \varphi(B_+) \rangle_C$ in C. Zeige:

a) φ induziert einen Morphismus von Schemata

$$f : \mathrm{Proj}(C) \setminus V(I) \to \mathrm{Proj}(B).$$

b) Für jedes homogene $b \in B_+$ gilt $f^{-1}(D_+(b)) = D_+(\varphi(b))$.

c) $f|_{D_+(\varphi(b))}$ ist gerade der Morphismus affiner Schemata, der durch den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} B_{(b)} & \to & C_{\varphi(b)} \\ a/b^k & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(b)^k \end{array}$$

induziert wird.

Aufgabe 3

Sei R ein graduierter Ring und $f \in R_+$.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & D_+(f) & \to & \operatorname{Spec}(R_{(f)}) \\ & I & \mapsto & IR_f \cap R_{(f)} \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

b) Zeige für $D_+(g) \subseteq D_+(f)$, dass $\varphi(D_+(g)) = D(\alpha)$ mit $\alpha = \frac{g^{\deg(f)}}{f^{\deg(g)}}$ gilt.

c) Zeige, dass $(D_+(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)|_{D_+(f)}})$ als lokal geringter Raum isomorph zu $\operatorname{Spec}(R_{(f)})$ ist.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ ein Polynomring. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$X_i = \operatorname{Spec}\left(K\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right).$$

Dies definiert affine Schemata $\mathbb{A}^n_{K,i} = (X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. Zeige, dass man durch verkleben von $\{\mathbb{A}^n_{K,0}, \ldots, \mathbb{A}^n_{K,n}\}$ das projektives Schema $(\operatorname{Proj}(R), \mathcal{O}))$ erhält.