Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

3. Dezember 2014

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei R ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$. Zeige, dass ein Element $r \in R$ genau dann nilpotent ist wenn $D(r) = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Weiter sei nun $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ und $f : Y \to X$ der von φ induzierte Morphismus (siehe Beispiel 3.24). Zeige folgende Aussagen:

a) φ ist genau dann injektiv, wenn der Garbenmorphismus$f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ injektiv ist.

b) Ist φ injektiv, so ist f dominant, das heißt $\overline{f(Y)} = X$.

c) φ ist genau dann surjektiv, wenn $\hat{f} : Y \to \operatorname{Spec}(\operatorname{im}(f))$ ein Homömorphismus und $\operatorname{Spec}(\operatorname{im}(f))$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und $f^{\#}$ surjektiv ist.

Aufgabe 3

Zeige, dass ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ genau dann lokal noethersch ist, wenn für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.