Prof. Werner M. Seiler
Mario Albert

9. Dezember 2014

Institut für Mathematik
Fachbereich 10
Universität Kassel

Algebraische Geometrie II

Blatt 8

Definition 1
Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Schemata heißt endlich, *wenn Y durch offene affine Mengen $V_i \cong \operatorname{Spec}(A_i)$ überdeckt wird, so dass $\varphi^{-1}(V_i)$ affin ist, d.h. $\varphi^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec}(B_i)$ und B_i bzgl. des Ringhomomorphismus $A_i \to B_i$ ein endlich erzeugter A_i-Modul ist.*

Aufgabe 1

Sei $\varphi : X \to Y$ ein endlicher Schemamorphismus. Zeige, dass dann für alle $P \in Y$ die Menge $\varphi^{-1}(P)$ endlich ist.

Aufgabe 2

Zeige folgende Aussagen:

a) Offene Immersionen sind lokal von endlichen Typ.

b) Abgeschlossene Immersionen sind vom endlichen Typ.

c) Komposition von Morphismen, die (lokal) vom endlichen Typ sind, liefert wieder einen Morphismus, der (lokal) vom endlichen Typ ist.

Aufgabe 3

Sei

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass für jeden R-Modul N die Sequenz

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Aufgabe 4

Sei M ein R-Modul und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeige folgende Isomorphie:

$$R/I \otimes_R M \cong M/IM.$$